Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Algèbre IV Printemps 2012

Enseignant : Maria Carrizosa
e-mail : carrizosa@math.univ-lyon1.fr
Cours : Jeudi 10h-12h
Salle : Amphi Jussieu

ALGEBRE IV : ALGEBRE GEOMETRIQUE

CHAPITRE 1
FORMES BILINEAIRES

1. Définitions

$\mathbb{K}$ $corps, E, F \in \mathbb{K} - espace\ vectoriel$
$f : E \to F$
$f(u+v) = f(u) + f(v)$
$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

DEFINITION 1 : APPLICATION BILINEAIRE

On appelle application bilinéaire $b : E \times F \to G$
$\forall\, x_1, x_2 \in E : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$
$\forall\, y_1, y_2 \in E : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$
$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y)$
$b(x, \lambda y) = \lambda b(x, y)$

De façon équivalente
$\left.\begin{matrix} \forall\, x, b(x,\_) \\ \forall\, y, b(\_, y) \end{matrix}\right\}$ $est\ linéaire$

$\boxed{b : E \times E \to \mathbb{K}}$ b bilinéaire forme bilinéaire

Exemple :

1) $\begin{matrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{matrix}$
2) $\begin{matrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{matrix}$
3) $\begin{matrix} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto x \wedge y \end{matrix}$
4) $\begin{matrix} C^\infty[0,1] \times C^\infty[0,1] \to \mathbb{R} \\ (f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{matrix}$
5) $\begin{matrix} E \times E^* \to \mathbb{K} \\ (x,y) \longmapsto f(x) \end{matrix}$
   $E^* = \{f : E \to \mathbb{K}\}$ linéaire = $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
6) $f, g \in E^*$
   $E \times E^* \to \mathbb{K}$
   $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$
7) E dimension finie base$(e_1, \dots, e_n)$
   $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})$
   $\forall x, y \in E$, de coordonnées respectivement $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$
   $(x,y) \to \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} x_i y_j = {}^t XAY$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

2. Matrice associée à une forme bilinéaire

E $\mathbb{K}-espace\ vectoriel$ dim finie, muni d'une base B=$(e_1,\dots,e_n)$
b forme bilinéaire sur E.
$x,y \in E \quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$
$b(x,y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i y_i b(e_i,e_j)$
$Soit\ A = \left(b\left(e_i,e_j\right)\right)_{1\le i,j\le n}$
b(x,y) = ${}^tXAY$

DEFINITION 2 : MATRICE ASSOCIEE

On dit que la matrice $M_B(b) = \left(b\left(e_i,e_j\right)\right)_{i,j}$ représente b dans la base B ou que c'est la matrice associée à la forme bilinéaire b dans la base B.

Remarque :

$$\begin{aligned} B(E\times E,\mathbb{K}) &\to M_n(\mathbb{K}) \\ b &\longmapsto M_B(b) \end{aligned}$$ est un isomorphe

D'où $\dim_{\mathbb{K}} B(E\times E,\mathbb{K}) = n^2$

3. Changement de base

Soient B_1, B_2 deux bases de E et P la matrice passage de B_1 à B_2 (rappel $P * X_{B_2} = X_{B_1}$)

THEOREME 1:
Soit b une forme bilinéaire sur E.
Alors $M_{B_2}(b) = {}^tPM_{B_1}(b)P$

PREUVE:
b(x,y) = ${}^tX_{B_1}M_{B_1}(b)Y_{B_1}$
b(x,y) = ${}^t(PX_{B_2})M_{B_1}(b)(PY_{B_2})$
b(x,y) = ${}^tX_{B_2}({}^tPM_{B_1}(b)P)Y_{B_2}$
d'où $M_{B_2}(b) = {}^tPM_{B_1}(b)P$

4. Symétrie et Antisymétrie

DEFINITION 3 : FORME BILINEAIRE SYMETRIQUE, ANTISYMETRIQUE ET ALTERNEE

b forme bilinéaire sur E.
On dit que b est :

- Symétrique : Si $b(x,y) = b(y,x)$
- Antisymétrique : Si $b(x,y) = -b(y,x)$
- Alternée : $Si\ b(x,x) = 0$
- Notation : $S_2(E)$ f et b symétrique
  $A_2(E)$ f et b antisymétrique

PROPOSITION 1:

Toute forme bilinéaire alternée sur E est antisymétrique.
La réciproque est vraie si car($\mathbb{K}$)≠2.

PREUVE:

- f(x,y)+f(y,x) = f(x+y, x+y) – f(x,x) – f(y,y) = 0
  f(x,y) = -f(y,x).
- 2 f(x,x) = f(x,x) + f(x,x) = -f(x,x) + f(x,x) = 0
  $\Longrightarrow f(x,x) = 0$

Remarque:

$M_B(b) = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

- b symétrique $a_{i,j} = b(e_i, e_j) = b\left(e_j, e_i\right) = a_{j,i}$ donc $M_B(b)$ est symétrique ${}^tM_B(b) = M_B(b)$.
- B anti-symétrique ${}^tM_B(b) = -M_B(b)$.

Toute forme bilinéaire (si car $\mathbb{K}$ ≠ 2) sur E se décompose en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et une forme bilinéaire antisymétrique.

$$b(x,y) = \underbrace{\frac{b(x,y)+b(y,x)}{2}}_{\in S_2(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}}_{\in A_2(\mathbb{K})}$$

5. <u>Noyau et rang d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée</u>

DEFINITION 4 : NOYAU D'UNE FORME BILINEAIRE

b : $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique ou alternée
On appelle le noyau de b l'ensemble
Ker b =$\{x \in E,\ \forall\, y \in E\ \ b(x,y) = 0\}$
Ker b =$\{y \in E,\ \forall\, x \in E\ \ b(x,y) = 0\}$

On définit $b_d : \begin{matrix} E \to E^* \\ y \mapsto b(\_,y) \end{matrix}$ $\qquad b_g : \begin{matrix} E \to E^* \\ x \mapsto b(x,\_) \end{matrix}$

<u>Digression sur Dual</u>

E, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base
$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{K},\ \ f \text{ linéaire} = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\}$
<u>On définit :</u> $e_1^*, \dots, e_r^*$ à E^*

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \ \ si\ \ i = j \\ 0 \ \ si\ i \neq j \end{cases}$$

$X \in E\ \ e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n e_i^*(x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j e_i^*(e_j) = x_i$
$B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
$f \in E^* = (f(e_1^*), \dots, f(e_n^*))$ est une base de E^*.
$f \in E^* = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ sont les coordonnées de f dans B^*.

<u>Exercice :</u> $M_{B,B^*}(b_d) = M_B(b)$

PROPOSITION 2:

E $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel* de dimension finie

b forme bilinéaire symétrique ou alternée, B base de E, A=$M_B(b)$ dim Ker b = n – rgA.

PREUVE:

$Dim\ Ker\ b = \dim Ker\ b_j = n - rang\ M_{B,B^*} b_j' = n - rang\ A.$

DEFINITION 5 : RANG D'UNE FORME BILINEAIRE

Le rang d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée est le rang de sa matrice associée dans une base quelconque, i.e. $rg(b) = n - \dim(Ker\ b)$

DEFINITION 6 : FORME BILINEAIRE REGULIERE, DEGENEREE

Une forme bilinéaire b sur E est dite non dégénérée (ou régulière) si $Ker\ b = \{0\}$. Elle est dégénérée si Ker b ≠ {0}

Remarque :

- La restriction d'une forme bilinéaire régulière à un ss-espace vectoriel de E peut être dégénérée .
- SI b est non dégénérée :
  L'application $b_d : \substack{E \to E \\ x \mapsto b(\_,x)}$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 3:

Principe de représentation de formes linéaires.

Si b régulière alors ∀ $f \in E^*$, il existe un unique $a \in E$, tel que $f(\_,\ a)$.

6. L'équivalence entre formes bilinéaires

E, F $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel* dim finie,

Soit $u : E \to F$ isomorphe.

b forme bilinéaire sur F.

On définit $\substack{E \times E \to \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto b(u(x),u(y))}$

C'est bien une forme bilinéaire.

DEFINITION 7 : FORME BILINEAIRE EQUIVALENTE

Soit E e.v. dim finie, b forme bilinéaire sur E.

Soit F e.v. dim finie, b^* forme bilinéaire sur F.

On dit que b et b' sont équivalentes s'il existe $U : E \to F$ isomorphismes tel que b(x,y) = $b^*(u(x), u(y))$.

Exercice : $Si\ P = M_{B,B'}(u)\ alors\ M_B(b) = {}^tPM_{B'}(b')P$

7. Orthogonalité : Orthogonalité entre vecteurs de E.

$E\ \mathbb{K}-espace\ vectoriel$ de dimension finie et b forme bilinéaire.

DEFINITION 8 : B-ORTHOGONAL

Soient $x, y \in E$.

On dit que x est b-orthogonal à y (ou orthogonal par rapport à b) si $b(x,y) = 0$. On le note $x \perp_b y$ si pas d'ambiguïté $x \perp y$.

Remarque :

1) Si b symétrique ou alternée la relation $\perp_b$ est symétrique.
2) Si x b-orthogonal à $y_1, \dots, y_r$ alors x et b-orthogonal à toute combinaison linéaire des y_i.
3) Les éléments de Ker b sont $b-orthogonaux$ à tout élément de E.

Rappel : $Ker\ b = \{x \in E, \forall\ y \in E\ \ b(x,y) = 0\} = Ker\ b_d = Ker\ b_g$.

DEFINITION 9 : ORTHOGONAL D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soient $A, B \subset E$. On dit que A et B sont b-orthogonaux et on le note $A \perp_b B$ si $\forall\ a \in A$, $\forall\ b \in B$, a $\perp_b b$.

DEFINITION 10 : ORTHOGONAL

Soit $A \subset E$ On appelle orthogonal de A l'ensemble $A^{\perp_b} = \{x \in E, \forall\ a \in A\ \ b(x,a) = 0\}$

PROPOSITION 4:

$A, B \subset E$ alors :

1) $A^{\perp_b}\ est\ un\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E.$
2) $A \subset B \implies B^{\perp_b} \subset A^{\perp_b}$
3) $A^{\perp_b} = (Vect\ A)^{\perp_b}$
4) $A\ ss-ev\ A \cap A^{\perp_b} = Ker\ b_A$ où $b_A = b_{|A\times A}$
5) A, B ss-espace vectoriel $(A+B)^{\perp_b} = A^{\perp_b} \cap B^{\perp_b}$
6) $A \subset (A^{\perp_b})^{\perp_b}$

PREUVE:

1) $x, y \in A^{\perp_b}, \lambda \in \mathbb{K}$.
   $\forall\ a \in A, b(x+\lambda y, a) = b(x,a) + \lambda b(y,a) = 0$
2) Soit $x \in B^{\perp}$
   $\forall\ a \in A$ on calcule $b(x,a)$
   $b \in A$ donc $b(x,a) = 0$
3) Comme $A \subset Vect\ A$ on a $(Vect\ A)^{\perp_b} \subset A^{\perp_b}$
   $Réciproque, x \in A^{\perp_b}$
   Soit $y \in Vect\ A$ donc $y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}\ a_i \in A\ b(x,y) = 0.$
5) $(A+B)^{\perp_b} \subset A^{\perp_b} \cap B^{\perp_b}$, soit $x \in (A+B)^{\perp_b}$.
   Soit $a \in A,\ a \in A \cap B$ donc $b(x,a) = 0$ donc $x \in A^{\perp_b}$, de même $x \in B^{\perp_b}$

Réciproquement, soit $x \in A^{\perp_b} \cap B^{\perp_b}$.
Soit y$\in A \cap B$, $y = a + b$ avec $a \in A$, de même $b \in B$.
$b(x,y) = b(x,a+b) = b(x,a) + b(x,b) = 0$

Exemple : $b: \begin{smallmatrix} M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ (X,Y) \mapsto tr(X,Y) \end{smallmatrix}$

Calculons $\left(Sn(\mathbb{K})\right)^{\perp b}$ il suffit de calculer l'orthogonal des matrices.
$E_{i,j} + E_{j,i}$ $(borné\ pour\ Sn(\mathbb{K}))$
Une matrice $A \in \left(Sn(\mathbb{K})\right)^{\perp b}$ sur $\forall\, i,j \in [1,n]$
$tr\left(A(E_{i,j} + E_{j,i})\right) = 0$

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & 1 & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$$

$$AE_{i,j} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & a_{i,j} & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad A(E_{i,j} + E_{j,i}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{i,j} \\ a_{j,i} & 0 \end{pmatrix}$$

$tr\left(A(E_{i,j} + E_{j,i})\right) = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} + a_{j,i} = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = a_{j,i}$
donc A est antisymétrique $\left(S_n(\mathbb{K})\right)^{\perp b} = A_n(\mathbb{K})$.

2ème disgression sur le dual.
$E\ \mathbb{K} - espace\ vectoriel$ de dim finie.
$E^*\ dual = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$
$A \subset E,\ B \subset E^*$
On note $A^{\perp} = \{f \in E^*, \forall\, a \in A, f(a) = 0\} \subset E^*$
On note $B^{\circ} = \{x \in E, \forall\, f \in B, f(x) = 0\} \subset E$

PROPOSITION 5:
$A\ ss - e.v.de\ E$ alors $\dim A^{\perp} = \dim E - \dim A$.

PREUVE:
1) $\left(E/A\right)^* \to A^{\perp}$ *isomorphisme*
2) Et $\dim E^* = \dim E$ pour tout espace vectoriel de dim finie.

PROPOSITION 6:
$\dim B^* = \dim E - \dim A$

PROPOSITION 7:
A_1, A_2 ss-espace vectoriel de E.
B_1, B_2 ss-espace vectoriel de E^*.
1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}$
2) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow B_2{}^{\circ} \subset B_1{}^{\circ}$

Remarque :

$b_d^{-1}(A°) = A^{\perp_b} \quad \begin{matrix} b_d : E \to E^* \\ x \mapsto b(\_,x) \end{matrix}$

$= \{x \in E \,, b_d \in A° \}$
$= \{x \in E \,, b(\_, x) \in A° \}$
$= \{x \in E \,, b(a,x) = 0, \ \forall\, a \in A \}$
$= A^{\perp_b}$

PROPOSITION 8:

A, B ss-espace vectoriel de E, b régulière non dégénérée alors
$A \subset B \implies B^{\perp_b} \subset A^{\perp_b}$

PREUVE:

$B^{\perp_b} \subset A^{\perp_b} \implies b_d^{-1}(B°) \subset b_d^{-1}(A°)$
b est non dégénérée $\Leftrightarrow Ker\ b = \{0\} \Leftrightarrow Ker\ b_d = \{0\}$
(Comme $b_d : E \to E^*$ *injective et dim* $E = $ *dim* E^* alors b_d est surjective donc un isomorphisme)
$\implies B° \subset A°$
$\implies A \subset B$.

PROPOSITION 9 : THEOREME DIMENSION DE L'ORTHOGONAL

A ss-espace vectoriel de E, b non dégénérée.
Alors $\dim A^{\perp_b} = \dim E - \dim A$.

PREUVE:

$A^{\perp_b} = b_d^{-1}(A°)$ comme b_d est un isomorphisme.
$\dim b_d^{-1}(A°) = \dim A° = \dim E - \dim A$.

PROPOSITION 10:

Si b est non dégénérée et A ss-espace vectoriel de E.
$(A^{\perp_b})^{\perp_b}$= A.

PREUVE:

$\dim (A^{\perp_b})^{\perp_b} = \dim E - \dim A^{\perp_b} = \dim E - (\dim E - \dim A) = \dim A$.
Et puisque $A \subset (A^{\perp_b})^{\perp_b}$ alors on a l'égalité.

PROPOSITION 11 : COROLLAIRE

Si b est non dégénérée et A ss-espace vectoriel de E.
$E = A \oplus A^{\perp_b}$.