Feuille de TD $n°1$: Courbes paramétrées planes

EXERCICE 1

Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$.

EXERCICE 2

Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ y = t^3/(1+t^2) \end{cases}$.

EXERCICE 3

a) Etudier la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

b) On note A et B les points d'intersection des axes (Ox) et (Oy) avec les tangentes au point de paramètre $t \neq 0 \quad [\pi/2]$ de la courbe précédente. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

EXERCICE 4 : Cardioïde

Etudier la courbe définie par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}$.

EXERCICE 5

Montrer que la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t + e^t \\ y(t) = t + e^{-t} \end{cases}$$

présente un point d'inflexion. Préciser l'équation de la tangente en ce point.

EXERCICE 6

Montrer que la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

possède un point double. Préciser les tangentes en ce point.

EXERCICE 7 (Supplément)

Le folium de Descartes est la courbe Γ d'équation $x^3 + y^3 = 3axy$ (avec $a > 0$ fixé). Obtenir une paramétrisation de Γ en la coupant par une droite variable passant par O.

EXERCICE 8 (Supplément)

Tracer la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3(t) \\ y(t) = \cos(t) - \cos^4(t) \end{cases}$$

CORRECTION EXERCICE 1

L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto M(t)$ est 2π périodique. Etude limitée à $[-\pi,\pi]$.

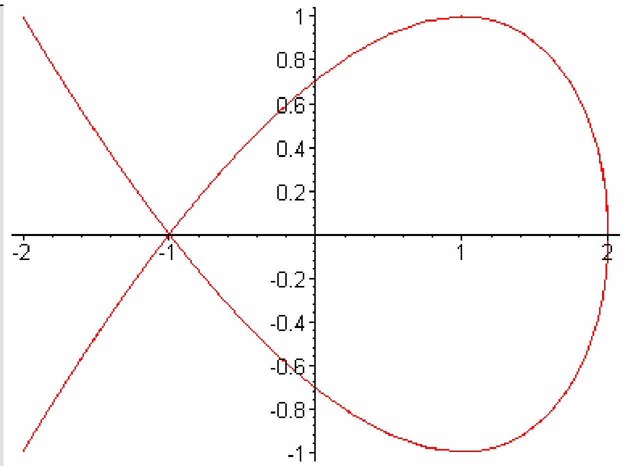
$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox) .

$M(\pi/2-t)$ et $M(\pi/2+t)$ sont confondus.

Etude limitée à $[0,\pi/2]$.

$$\begin{cases} x'(t)=-4\sin 2t \\ y'(t)=3\cos 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t)=0 \Leftrightarrow t=0,\pi/2 \\ y'(t)=0 \Leftrightarrow \pi/6,\pi/2 \end{cases}$$

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$	0		$-$		0
$x(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	-2
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
$m(t)$	∞	$-$	0	$+$	$?$



Etude en $t=\pi/2$:

$$\begin{cases} x''(t)=-8\cos 2t \\ y''(t)=-9\sin 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(\pi/2)=8 \\ y''(\pi/2)=9 \end{cases}$$

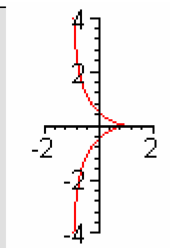
$p=2$ et la tangente à une pente égale à $9/8$.

Puisque $M(\pi/2-t)$ et $M(\pi/2+t)$ sont confondus, on a un point de rebroussement de seconde espèce.

CORRECTION EXERCICE 2

$M(-t)=s_{(Ox)}(M(t))$. Etude limitée à $[0,+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$x(t)$	1	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



En 0 : $x'(0)=y'(0)=0$ et $x''(0)=-4$ et $y''(0)=0$.

Tangente horizontale en $M(0)$

Par symétrie, c'est un point de rebroussement.

En $+\infty$: $x(t)\to -1^+$ et $y(t)\to +\infty$.

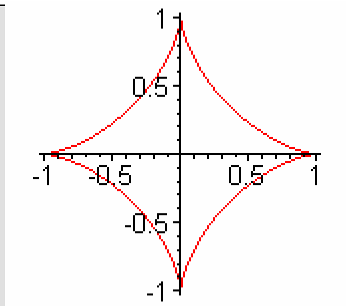
La droite d'équation $x=-1$ est asymptote, courbe à droite.

CORRECTION EXERCICE 3

a) $M(t+2\pi)=M(t)$, $M(-t)=s_{(Ox)}(M(t))$, $M(\pi-t)=s_{(Oy)}(M(t))$

et $M(\pi/2-t)=s_\Delta(M(t))$. Etude sur $[0,\pi/4]$.

t	0		$\pi/4$
$x(t)$	1	$\searrow$	$2^{-3/2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2^{-3/2}$



En 0 : $x'(0)=y'(0)=0$ et $x''(0)=-3$, $y''(0)=0$.

Tangente horizontale. Par symétrie, point de rebroussement.

En $\pi/4$: Tangente orthogonale à Δ .

b) $m(t)=-\tan t$, l'équation de la tangente en $M(t)$ est $y=-\tan t(x-\cos^3 t)+\sin^3 t$.

On a $A(t)\begin{vmatrix} 0 \\ \sin t \end{vmatrix}$ et $B(t)\begin{vmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{vmatrix}$. $A(t)B(t)=1$

CORRECTION EXERCICE 4 : Cardioïde

$t \mapsto M(t)$ est définie et $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

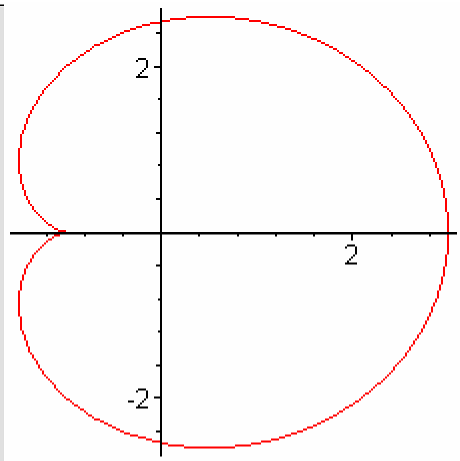
$t \mapsto M(t)$ est 2π périodique. Etude limitée à $[-\pi, \pi]$.

$M(-t)$ est le symétrie de $M(t)$ par rapport à (Ox).

Etude limitée à $[0, \pi]$.

$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t \\ y'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t \end{cases} \begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, 2\pi/3, \pi \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi/3, \pi \end{cases}.$

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$x(t)$	3	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0
$m(t)$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	$?$



Etude en π :

$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - 4\cos 2t \\ y''(t) = -2\sin t - 4\sin 2t \end{cases} \begin{cases} x''(\pi) = -2 \\ y''(\pi) = 0 \end{cases}$ $p = 2$, la tangente est horizontale.

$\begin{cases} x^{(3)}(t) = 2\sin t + 8\sin 2t \\ y^{(3)}(t) = -2\cos t - 8\cos 2t \end{cases} \begin{cases} x^{(3)}(\pi) = 0 \\ y^{(3)}(\pi) = -6 \end{cases}$ $q = 3$, point de rebroussement de première espèce.

CORRECTION EXERCICE 5

Comme $x'(t) = 1 + e^t$ ne s'annule pas, tous les points sont réguliers. Pour que le point de paramètre t soit un point d'inflexion, il est nécessaire qu'en ce point les entiers caractéristiques soient $p = 1$, $q \geqslant 3$ et q impair. En particulier, on doit avoir $\left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}\right)$ liée et donc $x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t) = 0$. Cette condition donne $e^t - e^{-t} = 2$ c'est-à-dire $t = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Réciproquement, en calculant (généralement par DL, mais ici directement, car c'est plus simple) les vecteurs :

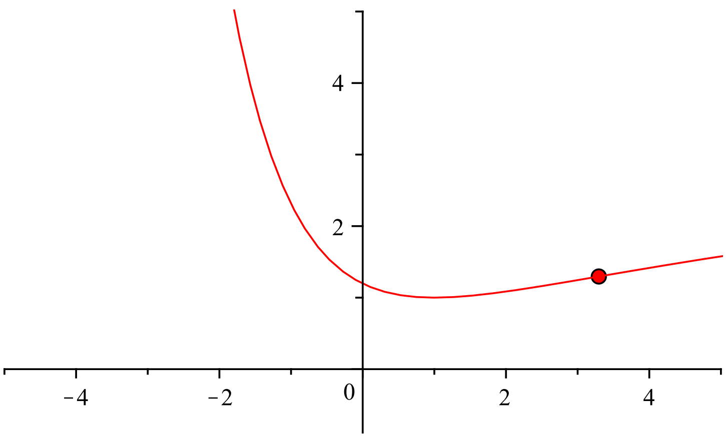
$$\overrightarrow{M''\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)} = \left(1 + \sqrt{2}, \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{M'''\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)} = \left(1 + \sqrt{2}, -\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$$

on constate qu'ils sont non colinéaires : on a donc bien $q = 3$. Le point

$$M\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + 1 + \sqrt{2}, \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$$

est finalement le seul point d'inflexion.



CORRECTION EXERCICE 6

On cherche deux réels $t \neq t'$ tels que :

$$\begin{cases} 3t^3 + 2t^2 - t - 1 & = & 3t'^3 + 2t'^2 - t' - 1 \\ 3t^2 + 2t + 1 & = & 3t'^2 + 2t' + 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 3\left(t'^2 + tt' + t^2\right) + 2\left(t' + t\right) - 1 & = & 0 \\ 3\left(t' - t\right) + 2 & = & 0 \end{cases}$$

ou encore, en posant $s = t + t'$ et $p = tt'$:

$$\begin{cases} 3\left(s^2 - p\right) + 2s - 1 & = & 0 \\ 3s + 2 & = & 0 \end{cases}$$

On en tire facilement :

$$(s, p) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, t et t' sont les racines de $3X^2 + 2X - 1$, à savoir -1 et $\frac{1}{3}$. Finalement, la courbe possède le point $P\,(-1, 2)$ pour unique point double. Les tangentes en P sont dirigées respectivement par :

$$\vec{u} = \overrightarrow{M'\,(-1)} \text{ de coordonnées } (4, -4)$$

et par :

$$\vec{u'} = \overrightarrow{M'\left(\frac{1}{3}\right)} \text{ de coordonnées } \left(\frac{4}{3}, 4\right)$$

Elles ont donc pour équations respectives :

$$\boxed{x + y - 3 = 0}$$

et

$$\boxed{3x - y + 5 = 0}$$

A titre indicatif, voici le tracé avec les deux tangentes indiquées :