U.S.T.H.B. **Juin 2016.**
Faculté de mathématiques
2^{eme}année Licence de mathématiques.
Géométrie

CORRIGE de l'exercice 2 de l'EXAMEN FINAL.

1. Le point M_1 appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ dirigée par $\overrightarrow{u_1}$ qui constitue une base de $\overrightarrow{\mathscr{D}_1}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 M_1}$ qui est dans $\overrightarrow{\mathscr{D}_1}$ s'écrit de manière unique : $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1}$. De même le point M_2 appartient à la doite $\mathscr{D}_2$ dirigée par $\overrightarrow{u_2}$ qui constitue une base de $\overrightarrow{\mathscr{D}_2}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{\Omega_2 M_2}$ qui est dans $\overrightarrow{\mathscr{D}_2}$ s'écrit de manière unique : $\overrightarrow{\Omega_2 M_2} = \alpha_2 \overrightarrow{u_2}$.

2. On utilise la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire. $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 M_2}$. D'où $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle =$

$\left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = \langle -\alpha_1 \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \langle \alpha_2 \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle$.
Le produit scalaire étant bilinéaire et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ unitaire, on a $\langle -\alpha_1 \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle =$
-$\alpha_1 \times \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle = -\alpha_1 \times 1 = -\alpha_1$ et $\langle \alpha_2 \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle = \alpha_2 \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle$. D'où, $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle =$
$-\alpha_1 + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle$.
De même $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle +$
$\left\langle \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = \langle -\alpha_1 \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle + \langle \alpha_2 \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle$. Le produit scalaire étant bilinéaire et le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ unitaire, on a $\langle -\alpha_1 \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle = -\alpha_1 \times \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle$ et $\langle \alpha_2 \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle =$
$\alpha_2 \times \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle = \alpha_2 \times 1 = \alpha_2$. D'où, $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = -\alpha_1 \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle + \alpha_2$.

3. Le déterminant du système est égal à $a^2 - 1 = \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle^2 - 1$. Le système admet une unique solution si et seulement si ce déterminant est non nul. Or celui-ci est non nul car $\langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle^2 - 1 = \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle^2 - 1 \times 1 = \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle^2 - \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle \times \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle \leq 0$ grâce à l'égalité de Cauchy-Schwartz. L'égalité avec zéro ayant lieu si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont liés. Or ce n'est pas le cas, car les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dirigées respectivement par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas parallèles, ce qui entraîne que $\langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle^2 - \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle \times \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle < 0$ donc différent de 0.

4. Dire qu'il existe un unique point M_1 de $\mathscr{D}_1$ et un unique point M_2 de $\mathscr{D}_2$ tels que la droite $(M_1 M_2)$ soit perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ entraîne que $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = 0$ Montrons que ces points existent et sont uniques. Pour cela on doit montrer qu'il existe un unique réel α_1 et un unique réel α_2 où $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{\Omega_2 M_2} = \alpha_2 \overrightarrow{u_2}$, tels que $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = 0 = -\alpha_1 + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle$ et $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = 0 = -\alpha_1 \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle + \alpha_2$. Ce qui montre que (α_1, α_2) est solution du système (S) et on a vu dans la question précédente que celui-ci admet une solution unique (α_1, α_2). Ce qui donne l'existence et l'unicité des points M_1 M_2 en question.
La relation de Chasles donne $\overrightarrow{N_1 N_2} = \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 N_2}$. Donc $\left\| \overrightarrow{N_1 N_2} \right\|^2 =$
$\left\| \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 N_2} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 N_2} \mid \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 N_2} \right\rangle$
$= \left\langle \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 N_2} + \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 N_2} + \overrightarrow{M_1 M_2} \right\rangle =$

$= \left\langle \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \mid \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{M_1M_2} \right\rangle + 2 \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\rangle =$ $\left\| \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|^2 + 2 \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\rangle$.

Mais $\overrightarrow{M_1M_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{N_1M_1}$ car la droite (M_1M_2) est perpendiculaire à la droite $(N_1M_1) = \mathscr{D}_1$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M_2N_2}$ car la droite (M_1M_2) est perpendiculaire à la droite $(N_2M_2) = \mathscr{D}_2$, donc $2 \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\rangle = 2 \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{N_1M_1} \right\rangle + 2 \left\langle \overrightarrow{M_1M_2} \mid \overrightarrow{M_2N_2} \right\rangle = 2\times 0 + 2\times 0 = 0$, et ainsi on obtient $\left\| \overrightarrow{N_1N_2} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|^2$.

La distance entre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est égale à $\inf_{N_1 \in \mathscr{D}_1 \ , N_2 \in \mathscr{D}_2} \left\| \overrightarrow{N_1N_2} \right\|$. La relation $\left\| \overrightarrow{N_1N_2} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|^2$ entraîne $\left\| \overrightarrow{N_1N_2} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{N_1M_1} + \overrightarrow{M_2N_2} \right\|^2 \geq 0$, donc $\left\| \overrightarrow{N_1N_2} \right\| \geq \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|$ et puisque M_1 appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ et M_2 appartient à la droite $\mathscr{D}_2$, on voit bien que $\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\|$ réalise le minimum des distances entre les points de la droite $\mathscr{D}_1$ et les points de la droite $\mathscr{D}_2$, minimum qui donne la distance entre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.