Faculté des sciences
Département de mathématiques
$2^{ème}$année licence (S4) (2015/2016)

12 Avril 2016
Contrôle continu de Géométrie (le corrigé)

Exercice1:
Soit la courbe suivante: $\alpha(t) = \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right)$
1. *Donner une limite de* $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ *quand* t *tend vers* $+\infty$*:*
$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right) = (0,0)$.
Le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right)$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right) = (0,0)$.
2. *Montrer que* α *a une longueur finie sur* $[0,+\infty[$
La longueur de α sur $[0,+\infty[$ est donnée par: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du$.
Or $\|\alpha'(t)\| = a\sqrt{b^2+1}e^{-bt}$, donc $\int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \frac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1)$
Ce qui donne: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1} < +\infty$ sur $[0,+\infty[$.
3. *Reparamétriser cette courbe par longueur d'arc:*
soit $s(t)$ une abscisse curviligne donnée par $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \frac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1)$. On fait le changement du paramètre, i.e: $t = \frac{-1}{b}\ln\left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}\right)$, et par suite , la nouvelle paramétrisation de la courbe est donnée par:
$\tilde{\alpha}(t) = a\left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}\right)\left(\cos\left(\frac{-1}{b}\ln\left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}\right)\right), \sin\left(\frac{-1}{b}\ln\left(1 - \frac{bs}{a\sqrt{b^2+1}}\right)\right)\right)$.
Exercice 2:
Considérons la courbe $\beta :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par: $\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, e^{-t}\right)$.
1. *La courbe* β *est-elle paramétrée par longueur d'arc ?*
On a: $\beta'(t) = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$ de norme: $\|\beta'(t)\| = 1$.
β est bien paramétrisée par longueur d'arc.
2. *Calculons la distance entre* $p = \beta(t)$ et $q = C_p \cap (ox)$.

- Déterminons une équation paramétrique de la droite C_p:

La droite C_p est dirigée par $\beta'(t)$, c'est l'ensemble des point $m(t) = (x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{\beta(t)m(t)}$ soit colinéaire à $\beta'(t)$. i.e, il existe une fonction $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\beta(t)m(t)} = \lambda(t)\beta'(t)$.
ce qui donne $\begin{cases} x(t) - \int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du = \lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}} \\ y(t) - e^{-t} = -\lambda(t)e^{-t} \end{cases}$, et par suite la représentation paramétrique de C_p est donnée par $\left(\int_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du + \lambda(t)\sqrt{1-e^{-2t}}, (1-\lambda(t))\, e^{-t}\right)$

- Soit q l'intersection de la droite C_p avec l'axe (ox) c-à-d $(1-\lambda(t))\,e^{-t} = 0$ et donc $\lambda(t) = 1 \;\; \forall t \in]0, +\infty[$. Par suite $q = \left(\sqrt{1-e^{-2t}} + \int\limits_0^t \sqrt{1-e^{-2u}}du, 0\right)$

- La distance entre p et q est le réel $pq = \|\overrightarrow{pq}\|$, or $\overrightarrow{pq} = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$ de norme $\|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{1-e^{-2t}+e^{-2t}} = 1 = pq$

3. *Calculons la courbure de* β:
$k(t) = \|T'(t)\|$, et comme $T(t) = \beta'(t) = \left(\sqrt{1-e^{-2t}}, -e^{-t}\right)$, alors $T'(t) = \left(\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}, e^{-t}\right)$
d'où $k(t) = \|T'(t)\| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$.

Exercice 3:

soit $\gamma(t) = \left(\displaystyle\int_0^t \frac{(1+ch^2u)\cos u}{ch^2u}du, \int_0^t \frac{(1+ch^2u)\sin u}{ch^2u}du, \int_0^t \frac{(1+ch^2u)\,shu}{ch^2u}du\right)$

le vecteur vitesse de la courbe γ est: $\gamma'(t) = \dfrac{(1+ch^2t)}{ch^2t}(\cos t, \sin t, sht)$ de norme:
$\|\gamma'(t)\| = \dfrac{(1+ch^2t)}{cht}$.

1. *Déterminer le repère de Frenet:*

- Posons $v(t) = \dfrac{(1+ch^2t)}{cht}$. Le vecteur tangent $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{cht}(\cos t, \sin t, sht)$

- Le vecteur normal: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ où $T'(t) = \dfrac{1}{ch^2t}(-\sin t cht - sht\cos t, \cos t cht - \sin t sht, 1)$

  de norme $\|T'(t)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{cht}$, d'où

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}cht}(-\sin t cht - sht\cos t, \cos t cht - \sin t sht, 1)$$

- Le vecteur binormal est: $B(t) = T(t) \wedge N(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}cht}(\sin t cht - sht\cos t, -cht\cos t - sht\sin t, 1)$.

2. *Calculer la courbure* κ *et la torsion* τ :

- La courbure: $\kappa(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{cht}{(1+ch^2t)}.\dfrac{\sqrt{2}}{cht}$. Enfin $\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{1+ch^2t}$.

- La torsion:$\tau(t) = -\dfrac{1}{v(t)}\langle B'(t), N(t)\rangle$, or $B'(t) = \dfrac{sht}{\sqrt{2}ch^2t}(cht\sin t + sht\cos t, sht\sin t - cht\cos t, -1)$

donc $\tau(t) = -\dfrac{cht}{(1+ch^2t)}\left(\dfrac{sht}{2ch^3t}(-2ch^2t)\right)$ d'où $\tau(t) = \dfrac{sht}{1+ch^2t}$.

3. *Verifier que la fonction* $\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}$ *est constante:*
$\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+ch^2t)}{(sh^2t+2)} = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+ch^2t)}{(1+ch^2t)}$, ainsi $\dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2} = \sqrt{2}$