U.S.T.H.B. **Juin 2016.**

Faculté de mathématiques

2emeannée Licence de mathématiques.

Géométrie

EXAMEN FINAL.

Exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine et $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites affines de $\mathscr{E}$ distinctes se coupant en un point Ω. Soient Δ_1 et Δ_2 deux autres droites distinctes entre elles et telles que $\Delta_1 \cap \mathscr{D}_1 = \{A\}$, $\Delta_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{C\}$, $\Delta_2 \cap \mathscr{D}_1 = \{D\}$, $\Delta_2 \cap \mathscr{D}_2 = \{B\}$. On note les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$ respectivement par I et J. On munit $\mathscr{E}$ du plan cartésien $\{\Omega;\ \overrightarrow{\Omega A},\ \overrightarrow{\Omega B}\}$.

1. Faire un dessin puis montrer que les coordonnées des points A, B C, D, I et J sont respectivement $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,c)$, $(d,0)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{d}{2},\ \frac{c}{2}\right)$ où c et d sont dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes des droites (AC) et (BD).
3. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles si et seulement si $cd = 1$.
   On suppose dorénavant que $cd \neq 1$.
4. Montrer que les droites (AC) et (BD) se coupent en un point unique qu'on notera W de coordonnées $\left(\frac{d(c-1)}{dc-1},\ \frac{c(d-1)}{dc-1}\right)$.
5. Montrer que les points I et J sont alignés avec le milieu du segment $[\Omega W]$.

Exercice 2

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites affines non parallèles et disjointes d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension supérieure ou égale à trois, le produit scalaire étant désigné par $\langle . \mid . \rangle$ et la norme associée par $\| . \|$. On munit les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ des repères cartésiens respectifs $\{\Omega_1; \overrightarrow{u_1}\}$ et $\{\Omega_2; \overrightarrow{u_2}\}$, où $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont supposés unitaires, c'est-à-dire $\langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle = \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle = 1$. Soient M_1 et M_2 deux points appartenant respectivement à $\mathscr{D}_1$ et à $\mathscr{D}_2$.

1. Montrer qu'il existe α_1 et α_2 uniques tels que $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_2 M_2} = \alpha_2 \overrightarrow{u_2}$.
2. Montrer que $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle =$

$\left\langle \overrightarrow{M_1 \Omega_1} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_2 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = -\alpha_1 + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{u_2} \mid \overrightarrow{u_1} \rangle$,

et de manière similaire, montrer que $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = -\alpha_1 \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle + \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle + \alpha_2$.

3. Montrer que le système (S) $\left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & - & a.\alpha_2 & = & b_1 \\ a.\alpha_1 & - & \alpha_2 & = & b_2 \end{array} \right.$ d'inconnues $\alpha_1,\ \alpha_2$ a une unique solution, où on a $a = \langle \overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2} \rangle$, $b_1 = \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle$ et $b_2 = \left\langle \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle$.
4. On dit que la droite $(M_1 M_2)$ est perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si $\left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{u_2} \right\rangle = 0$. Montrer qu'il existe un unique point M_1 de $\mathscr{D}_1$ et un unique point M_2 de $\mathscr{D}_2$ de tels que la droite $(M_1 M_2)$ soit perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. En déduire alors que pour tous points N_1 de $\mathscr{D}_1$ et N_2 de $\mathscr{D}_2$ on a $\left\| \overrightarrow{N_1 N_2} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{N_1 M_1} + \overrightarrow{M_2 N_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{M_1 M_2} \right\|^2$ et que la distance entre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est égale à $\left\| \overrightarrow{M_1 M_2} \right\|$.