Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
2ème année licence (S4)

A.U 2015-2016
Durée : 1 h 30 mn

Contrôle Continu de Géométrie
12 Avril 2016

N.B : *L'usage de tout **appareil électronique** est strictement **interdit***

Exercice 1 :

Considérer la courbe $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(t) = (ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t)$$

Où $a, b > 0$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0, +\infty[$.
3. Reparamétriser cette courbe par longueur d'arc.

Exercice 2 :

On considère la courbe paramétrée $\beta:]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\beta(t) = \left(\int_0^t \sqrt{1 - e^{-2u}}\, du, e^{-t}\right)$$

1. La courbe β est-elle paramétrée par longueur d'arc ?
2. Soit C_p la droite tangente à la courbe β au point $p = \beta(t)$, on note q l'intersection de C_p avec l'axe (ox). Prouver que, pour tout $t > 0$, la distance entre p et q vaut un.
3. Calculer la courbure de β en chaque point.

Exercice 3 :

Soit γ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \frac{(1 + ch^2u)\cos u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u)\sin u}{ch^2u} du, \int_0^t \frac{(1 + ch^2u) shu}{ch^2u} du\right)$$

1. Déterminer, en un point de γ, le repère de Frenet.
2. Calculer la courbure k et la torsion τ en un point $\gamma(t)$.
3. Vérifier que la fonction $\frac{k}{\tau^2 + k^2}$ est constante.

Barème : Exercice 1: 6*pts* Exercice 2: 6*pts* Exercice 3: *8pts*

Bon courage