Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Analyse Complexe – 2ème Année LMD S4 – 2016

TD 1 – Solutions

1. Soient $z = 1 + 2i$ et $w = 3 - i$, représenter les nombres suivants sous la forme $a + ib$.

(a) $2z + 5w$ (b) $iz + 3w$ (c) $z^3 + \overline{(w^2)}$

Solutions.

(a) $2z + 5w = 2(1 + 2i) + 5(3 - i) = 17 - i$

(b) $iz + 3w = i(1 + 2i) + 3(3 - i) = 7 - 2i$

(c) $z^3 + \overline{(w^2)} = (1 + 2i)^3 + (3 + i)^2 = -14 - 6i$

2. Écrire sous forme polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) $3i$ (b) $2 - 2i$ (c) $-1 + i\sqrt{3}$

Solutions.

(a) $3i = 2e^{i\pi/2}$

(b) $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

(c) $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}$

3. Trouver les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(z - 2)/(z + 2)$ (c) $(\sqrt{3} + i)^6$ (e) $(1 + i)^n, n \in \mathbb{N}$

(b) $(2 + 5i)/(4 + 2i)$ (d) $(1 + i\sqrt{3})^6$ (f) $i^n, n \in \mathbb{N}$

Solutions.

(a) $\dfrac{z-2}{z+2} = \dfrac{(x-2)+iy}{(x+2)+iy} = \dfrac{(x-2)+iy}{(x+2)+iy}\dfrac{(x+2)-iy}{(x+2)-iy} = \dfrac{(x^2+y^2-4)+4iy}{x^2+y^2+4x+4}$

(b) $\dfrac{(2+5i)}{(4+2i)} = \dfrac{(2+5i)}{(4+2i)}\dfrac{(4-2i)}{(4-2i)} = \dfrac{9}{10} + i\dfrac{4}{5}$

(c) $(\sqrt{3} + i)^6 = (2e^{i\pi/6})^6 = 2^6 e^{i\pi} = -2^6 = -64$

(d) $(1 + i\sqrt{3})^6 = (2e^{i\pi/3})^6 = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6 = 64$

(e) $(1 + i)^n = [\sqrt{2}e^{i\pi/4}]^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}, n \in \mathbb{N}$
$(1 + i)^n = 1 + i, 2i, -2 + 2i, -4, -4 - 4i, -8i, 8 - 8i, 16, 16 + 16i, 32i, -32 + 32i, \cdots$

(f) $i^n = 1$ si $n = 4k$, $i^n = i$ si $n = 4k + 1$, $i^n = -1$ si $n = 4k + 2$ et $i^n = -i$ si $n = 4k + 3$.

4. Trouver le module, l'argument et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $-3+2i$ (b) $(2+i)(-4+3i)$ (c) $(1+i)^8$ (d) $(2+7i)/(1-i)$

Solutions.

(a) $z=-3+2i, |z|=\sqrt{13}, \arg(z)=-\arctan(2/3), \overline{z}=-3-2i.$

(b) $z=(2+i)(-4+3i)=-11+2i, |z|=\sqrt{125}, \arg(z)=-\arctan(2/11), \overline{z}=-11-2i.$

(c) $z=(1+i)^8=16, |z|=16, \arg(z)=0, \overline{z}=16.$

(d) $\dfrac{2+7i}{1-i}=\dfrac{-5+9i}{2}, |z|=\dfrac{\sqrt{106}}{2}, \arg(z)=-\arctan(9/5), \overline{z}=\dfrac{-5-9i}{2}.$

5. Écrire sous forme cartésienne chacun des nombres complexes suivants :

(a) $\sqrt{2}e^{i21\pi/4}$ (b) $11e^{i15\pi/2}$ (c) $-e^{-i200\pi}$ (d) $-3e^{i5\pi/2}$

Solutions.

(a) $\sqrt{2}e^{i21\pi/4}=\sqrt{2}(\cos(21\pi/4)+i\sin(21\pi/4)=-1-i$
(b) $11e^{i15\pi/2}=11(\cos(15\pi/2)+i\sin(15\pi/2)=-11i$
(c) $-e^{-i200\pi}=-(\cos(-200\pi)+i\sin(-200\pi)=-1$
(d) $-3e^{i5\pi/2}=-3(\cos(5\pi/2)+i\sin(5\pi/2)=-3i$

6. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et puis préciser leurs répartitions dans le plan complexe.

(a) $2z^2+2z+5=0$ (c) $z^6-z^3-2=0$ (e) $z^5=-32$

(b) $z^4-z^2-2=0$ (d) $z^6=1$ (f) $z^6=-64$

Solutions.

(a) $2z^2+2z+5=0; z=(-1+3i)/2, (-1-3i)/2$

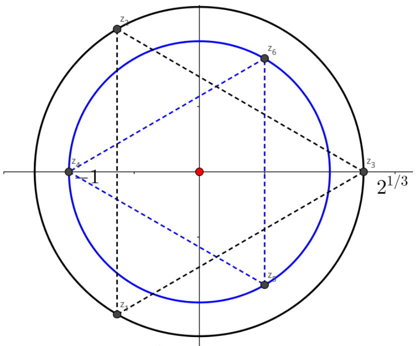
(b) $z^4-z^2-2=0 \Leftrightarrow (z^2-2)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}, \pm i.$

(c) $z^6-z^3-2=0 \Leftrightarrow (z^3-2)(z^3+1)=0 \Leftrightarrow z^3=2e^{i2k\pi}, z^3=e^{i(\pi+2k\pi)}$
$\Leftrightarrow z_k=2^{1/3}e^{i2k\pi/3}$ ou bien $z_k=e^{i(\pi+2k\pi)/3}, k=0,1,2$
$\Leftrightarrow z_k=2^{1/3}, 2^{1/3}(-1\pm i\sqrt{3})/2$ ou bien $z_k=-1, (1\pm i\sqrt{3})/2.$

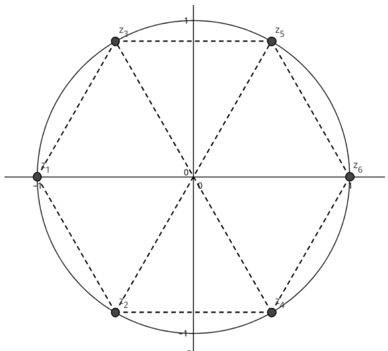
(d) $z^6=1=e^{i2k\pi} \Rightarrow z_k=e^{ik\pi/3}, k=0,1,2,3,4,5 \Leftrightarrow z=\pm1, (\pm1\pm i\sqrt{3})/2$.

(e) $z^5=-32=2^5e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z_k=2e^{i(\pi+2k\pi)/5}, k=0,1,2,3,4 \Leftrightarrow z=-2, -0.62\pm 1.9i, 1.62\pm1.18i.$

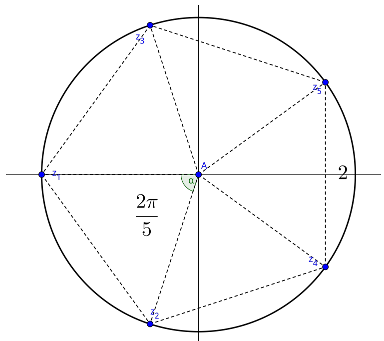
(f) $z^6=-64=2^6e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z_k=2e^{i(\pi+2k\pi)/6}, k=0,1,2,3,4,5 \Leftrightarrow z=\pm2i, \pm\sqrt{3}\pm i.$



$(c)\ z^6 - z^2 - 2 = 0$



$(d)\ z^6 = 1$



$(e)\ z^5 = -32$

7. Étant donné $(2+i)(3+i)$, montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

Solution.

Puisque on $(2+i)(3+i) = 5(1+i)$ alors

$\arg((2+i)(3+i)) = \arg(2+i) + \arg(3+i) = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \arg 5(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$.