# Université Ferhat Abbas, Sétif 1
## Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

TD 5. Intégration complexe – Solutions

**1.** Calculer les intégrales curvilignes :

(a) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}dz$, avec $\gamma(t) = t^2 + it,\ 0 \leq t \leq 2.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (\overline{z} - z)\, dz$, avec $\gamma(t) = -t + it^2,\ 0 \leq t \leq 2.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(4z^3 + 3z^2\right) dz$, avec $\gamma$ le segment de $z_1 = 1 - i$ vers $z_2 = 2 + i$.

(d) $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$ le long de $\gamma(t) = 2t + i(t^2 + 3)$.

**Solution.**

(a) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^2 \left(t^2 - it\right)(2t + i)\, dt = 10 - \frac{8i}{3}$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (\overline{z} - z)\, dz = \int_0^2 -2it^2\,(2it - 1)\, dt = 16\left(1 + \frac{i}{3}\right)$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(4z^3 + 3z^2\right) dz = \int_{1-i}^{2+i} \left(4z^3 + 3z^2\right) dz = \left[z^4 + z^3\right]_{1-i}^{2+i} = 1 + 37i$

(d) Les points $(0, 3)$ et $(2, 4)$ correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée à alors pour valeur $\displaystyle\int_0^1 \left(2(t^2 + 3) + (2t)^2\right) 2dt + (3(2t) - (t^2 + 3))2tdt = \frac{33}{2}.$

**2.** Trouver une borne supérieure de $\displaystyle\left|\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz\right|.$

**Solution.** On utilise la formule $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)|\, L(\gamma).$

Si $|z| = 3$, nous avons $|e^z| = e^x \leq e^3$ et $\left|z^2 + 1\right| \geq |z|^2 - 1 = 9 - 1 = 8$, autrement $\displaystyle\left|\frac{e^z}{z^2 + 1}\right| \leq \frac{e^3}{8}.$

D'autre part la longueur $L(\gamma) = 6\pi$ donc $\displaystyle\left|\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz\right| \leq \frac{3\pi e^3}{4}.$

**3.** Trouver une borne supérieure de $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 1} dz\right|$ avec $\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, \pi/2]$.

**Solution.** Par les mêmes techniques que dans l'exercice précédent, on trouve que $\displaystyle\left|\frac{e^z}{z^2 + 1}\right| \leq \frac{e^x}{|z|^2 - 1} \leq \frac{e^2}{3}$ , $L(\gamma) = \pi$ donc $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + 1} dz\right| \leq \frac{\pi e^2}{3}.$

**4.** Calculer $\int_\gamma (x^2+xy^2)dx+(y^2-x^2y)dy$, où $\gamma$ est le carré de sommets $(0,0),(3,0),(3,3),(0,3)$.

**Solution.** D'après la formule de Green, nous avons pour $u(x,y)=x^2+xy^2$ et $v(x,y)=y^2-x^2y$

$$\int_\gamma \left(x^2+xy^2\right)dx+\left(y^2-x^2y\right)dy=\iint_{carré}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=\int_0^3\int_0^3(-4xy)\,dxdy=-81.$$

**5.** Montrer que si $0$ n'est pas dans l'image de $\gamma$, alors $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ est un entier.

**Solution.** Si $0$ n'est pas dans l'image de $\gamma$, alors l'indice est existe et on a donc $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)dz$. D'autre part $\int_\gamma \frac{\overline{z}}{|z|^2}dz=\int_\gamma \frac{dz}{z}=2\pi i I(\gamma,0)$.
Autrement $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\mathrm{Im}\left(\frac{2\pi i I(\gamma,0)}{2\pi}\right)=I(\gamma,0)$ qui est entier.

**6.** Calculer les intégrales suivantes:

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}$ (e) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin(iz)}{z^2-4z+3}dz$ (d) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)^2}$ (f) $\displaystyle\oint_{|z-2|=3}\frac{\cosh(e^{i\pi z})}{(z^3-4z^2)}dz$

**Solution.** Par la formule d'intégration de Cauchy (FIC), on trouve

(a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz=\oint_{|z-1|=2}\frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1}dz=2\pi i f(1)=\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi i}{2}$, avec $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}$.

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin(iz)}{z^2-4z+3}dz=\oint_{|z|=2}\frac{f(z)}{z-1}dz=2\pi i f(1)=\pi\sinh(1)$, avec $f(z)=\dfrac{\sin(iz)}{z-3}$.

(c) $\displaystyle\oint_{|z|=5}\frac{dz}{z^2+16}=\int_{|z|=5}\frac{dz}{(z+4i)(z-4i)}=\frac{i}{8}\int_{|z|=5}\frac{dz}{(z+4i)}-\frac{i}{8}\int_{|z|=5}\frac{dz}{(z-4i)}=\frac{i}{8}(2\pi i-2\pi i)=0$

(d) On remarque que seulement les deux singularités $z=\pm 3i$ qui sont à l'intérieur de $|z|=4$ et donc par la formule d'intégration de Cauchy , on obtient que

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)^2}&=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z-3i)(z+3i)(z+9)^2}\\&=\oint_{|z-3i|=1}\frac{(z+3i)^{-1}(z+9)^{-2}}{(z-3i)}dz+\oint_{|z+3i|=1}\frac{(z-3i)^{-1}(z+9)^{-2}}{(z+3i)}dz\\&=2\pi i(3i+3i)^{-1}(3i+9)^{-2}+2\pi i(-3i-3i)^{-1}(-3i+9)^{-2}\\&=\left(\frac{2}{675}-\frac{1}{450}i\right)\pi+\left(\frac{-2}{675}-\frac{1}{450}i\right)\pi=-\frac{i\pi}{225}\end{aligned}$$

(e) Pour cette intégrale, on utilise la formule d'intégration de Cauchy pour les dérivées, on obtient $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz=\int_{|z-1|=1}\frac{\sin(\pi z)/(z+1)^2}{(z-1)^2}dz=2\pi i\left(\sin(\pi z)/(z+1)^2\right)'_{z=1}=$ $2\pi i(\frac{-\pi}{4})=-\dfrac{i\pi^2}{2}$

(f) Les singularités $z_1 = 0$ et $z_2 = 4$ sont à l'intérieur de $|z| = 3$.

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-2|=3} \frac{\cosh(e^{i\pi z})}{(z^3-4z^2)}dz &= \oint_{|z-2|=3} \frac{\cosh(e^{i\pi z})}{z^2(z-4)}dz \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{(z-4)^{-1}\cosh(e^{i\pi z})}{z^2}dz + \oint_{|z-4|=1} \frac{z^{-2}\cosh(e^{i\pi z})}{(z-4)}dz \\
&= 2\pi i\left(-\frac{\cosh(1)}{16} - \frac{i\pi}{4}\sinh(1)\right) + 2\pi i\frac{\cosh(e^{4\pi i})}{16} \\
&= -\frac{\pi i}{8}\cosh(1) + \frac{\pi^2}{2}\sinh(1) + \frac{\pi i}{8}\cosh(1) \\
&= \frac{\pi^2}{2}\sinh(1).
\end{aligned}$$

**7.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$; $m, n \in \mathbb{Z}^*$ et $f$ une fonction complexe définie par : $f(z) = (z-a)^n(z-b)^m$. Soit $\gamma$ un chemin fermé du plan avec $a, b \notin \operatorname{Im}\gamma$. Prouver que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\,(nI(\gamma,a) + mI(\gamma,b))$.

**Solution.** $f'(z) = n(z-a)^{n-1}(z-b)^m + m(z-a)^n(z-b)^{m-1}$ on a donc
$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n\int_\gamma \frac{dz}{z-a} + m\int_\gamma \frac{dz}{z-b}dz = 2\pi i\,(nI(\gamma,a) + mI(\gamma,b))$.

**8.** Soit $f$ une fonction entière et supposons que $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, avec $M > 0$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme de degré $\leq 1$ sur $\mathbb{C}$.

**Solution.** On pose $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \neq 0$ et $g(z) = 0$ si $z = 0$. Cette fonction vérifie les conditions de Liouville, donc elle est constante sur $\mathbb{C}$. Ce qui donne que $\frac{f(z)}{z} = \lambda$, autrement $f(z)$ est un polynôme de degré $\leq 1$ sur $\mathbb{C}$.

**9.** Trouver $\max_{z\in D}|f(z)|$ et les points $z$ de $D$ où cette valeur est atteinte dans les cas suivants :

(a) $f(z) = iz - 1$ et $D := |z| \leq 5$ (b) $f(z) = e^z$ et $D := |z-1| \leq 1$

**Solution.**

(a) Puisque $f(z) = iz - 1$ est continue et analytique sur $D := |z| \leq 5$, donc le principe du module maximum nous donne

$$\max_{|z|\leq 5}|iz-1| = \max_{|z|=5}|iz-1| \leq \max_{|z|=5}(|i||z|+1) = 6.$$

En effet le maximum est obtenu quand $z = 5i$ car $|f(5i)| = |i(5i)-1| = |-6| = 6$.

(b) Puisque $f(z) = e^z$ est continue et analytique sur $D := |z-1| \leq 1$, donc le principe du module maximum nous donne

$$\max_{|z-1|\leq 1}|e^z| = \max_{|z-1|=1}|e^z| = \max_{0\leq x\leq 2} e^x = e^2.$$