TD 2. Opérations sur le corps des complexes (2) – Solutions

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
Solution.
$|\overline{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
$|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
$|\operatorname{Im} z| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

2. Si $z = re^{i\theta}$, calculer $(z + \overline{z})\left(z^2 + \overline{z}^2\right) \ldots\ldots (z^n + \overline{z}^n)$ en fonction de r et θ.
Solution.
Soit $z = re^{i\theta}$ alors $z^k + \overline{z}^k = 2r^k \cos(k\theta)$. On a donc
$(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2) \cdots (z^n + \overline{z}^n) = 2r\cos(\theta) 2r^2 \cos(2\theta) \cdots 2r^n \cos(n\theta)$
$= 2^n r^{(1+2+\cdots n)} \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 2^{n-1} r^{n(n+1)} \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

3. Montrer que si $z, a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ et $|z| < 1$, alors $\left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| < 1$.

Solution.
Notons que l'inégalité est équivalente à : $1 - \left|\dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|^2 > 0$.

$1 - \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = 1 - \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\overline{\left(\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)} = 1 - \dfrac{|z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2}{1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2} = \dfrac{1 + |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2} =$
$\dfrac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2} > 0.$

4. Utiliser la formule de Moivre pour montrer :

(a) $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$
(b) $\sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$
(c) $\cos^3 x = (3\cos x + \cos 3x)/4$
(d) $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$

Solution.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $e^{ix} = (\cos x + i\sin x)$. Alors

$$\begin{aligned} e^{i3x} &= (\cos 3x + i\sin 3x) \\ &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

On obtient donc
(a) $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ et
(b) $\sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.
On utilise les formules $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et $\sin kx = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$ pour obtenir

(c) $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}\right) = \dfrac{(3\cos x + \cos 3x)}{4}$.

(d) $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\dfrac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i}\right) = \dfrac{(3\sin x - \sin 3x)}{4}$.

5. Si $z, w \in \mathbb{C}$, montrer que :

(a) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

(b) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$

(c) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(d) $||z| - |w|| \leq |z-w|$

Solution.

$$
\begin{aligned}
\text{(a) } |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\
&= 2|z|^2 + 2|w|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b) } |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(c) } |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}
$$

(d) $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z-w|$
et $|w| = |w-z+z| \leq |z-w| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |z-w| \Rightarrow |z| - |w| \geq -|z-w|$
d'où $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

6. Démontrer les formules suivantes :

(a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

(b) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(c) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ $(z_2 \neq 0)$

7. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

(a) $\mathrm{Im}\ z^2 < 2$

(b) $|1+z| = 2|1-z|$

(c) $|z| + \mathrm{Re}\, z < 1$

(d) $\mathrm{Re}\,(1/z) = \dfrac{1}{4}$

(e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$

(f) $2 \leq |z-1+i| < 3$

(g) $\mathrm{Im}(z-i) \geq 3$

(h) $|z-i| = |z+i|$

(i) $|z-i| + |z+i| = 3$

Solutions.

(a) $z^2 < 2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x+iy)^2 < 2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x^2+y^2+2ixy) < 2 \Leftrightarrow xy < 1$.
La solution représente les points entre la courbe $y = 1/x$ et les axes.
La solution est un ouvert, non bornée, connexe.

(b) $|1+z| = 2|1-z| \Leftrightarrow |1+z|^2 = 4|1-z|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2$
$\Leftrightarrow (x-5/3)^2 + y^2 = (4/3)^2$.
La solution représente les points du cercle de centre $(5/3, 0)$ et de rayon $4/3$.
La solution est fermée, bornée et connexe.

(c) $|z| + \mathrm{Re}\, z < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < 1 - x \Leftrightarrow x^2 + y^2 < (1-x)^2 \Leftrightarrow x < (1-y^2)/2$.
La solution représente les points sous la parabole $x = (1-y^2)/2$.
La solution est un ouvert, non bornée et connexe.

(d) Pour $z \neq 0$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}z}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = 2^2$.
La solution représente les points du cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 2.
La solution est fermée, bornée et connexe.

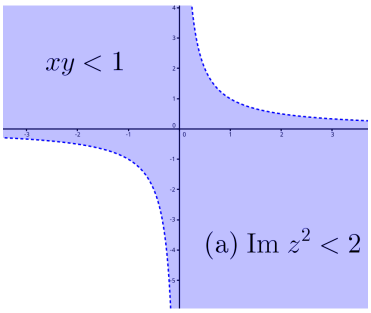
(e) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2 < 4(x+3)^2+4y^2, (z \neq -3)$
$\Leftrightarrow -3x^2-3y^2-30x-27 < 0, (x \neq -3, y \neq 0)$
$\Leftrightarrow (x+5)^2+y^2 > 4^2, (x \neq -3, y \neq 0)$.
La solution représente l'extérieur du disque de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.
La solution est ouverte, non borné et connexe.

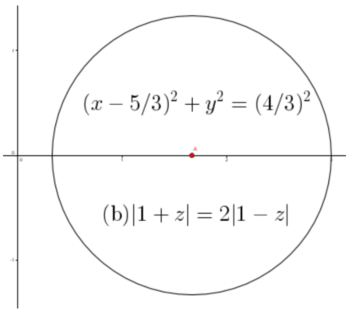
(f) $2 \leq |z-1+i| < 3$ est la couronne de centre $1-i$ et rayons $r_1 = 2, r_2 = 3$.
La solution n'est ouverte ni fermée, borné et connexe.

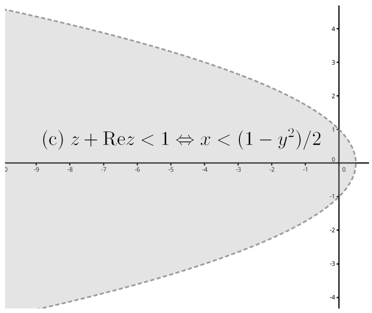
(g) $\operatorname{Im}(z-i) \geq 3 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x+iy-i) \geq 3 \Leftrightarrow y-1 \geq 3 \Leftrightarrow y \geq 4$.
La solution représente le demi plan $y \geq 2$.
La solution est fermée, non borné et connexe.

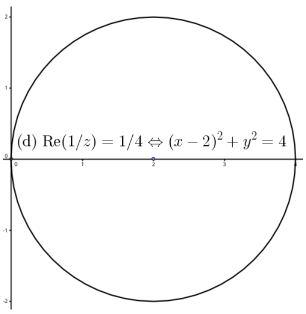
(h) $|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0$.
La solution représente l'axe des x.
La solution est fermée, non borné et connexe.

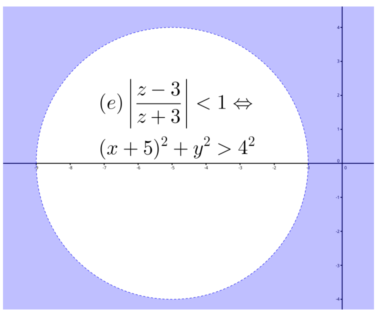
(i) $|z-i|+|z+i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 3 - \sqrt{x^2+(y+1)^2}$
$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 9 - 6\sqrt{x^2+(y+1)^2} + x^2 + (y+1)^2$
$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2+y^2+2y+1} = 9-4y$
$\Leftrightarrow 36x^2+36y^2+72y+36 = 16y^2+72y+81$
$\Leftrightarrow 36x^2+20y^2 = 45 \Leftrightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = \frac{1}{16}$
La solution représente une ellipse de centre $(0,0)$ et points focales $(0,1), (0,-1)$.
La solution est fermée, borné et connexe.

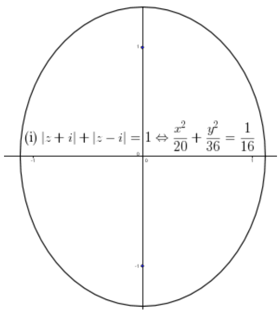












1

-1 (i) $|z+i|+|z-$ 1
$i| = 1$
-1 $\Leftrightarrow$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{36} = \frac{1}{16}$$