TD 3. Fonctions complexes élémentaires – Solutions

1. Donner une factorisation complète de : $f(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$.

Solution.

$f(z) = z^3 - 2z^2 + 2z = z(z^2 - 2z + 2) = z((z-1)^2 + 1) = z((z-1)^2 - i^2) = z(z-1-i)(z-1-i)$.

2. Trouver toutes les valeurs possibles des nombres complexes suivants:

(a) $e^{1+i\pi}$ (b) $\log(-1-i)$ (c) i^{2+i} (d) $\cos(i^3)$

Solution.

(a) $e^{1+i\pi} = e^1 e^{i\pi} = e(\cos\pi + i\sin\pi) = -e$.

(b) $\log(-1-i) = \ln|-1-i| + i\arg(-1-i) = \ln(\sqrt{2}) + -3i\pi/4 + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) $i^{2+i} = e^{(2+i)\log(i)} = e^{(2+i)i(\pi/2+2k\pi)} = e^{-(\pi/2+2k\pi)}e^{i(\pi+4k\pi)} = -e^{-(\pi/2+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\cos(i^3) = \dfrac{e^{i^4} + e^{-i^4}}{2} = \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \cosh(1)$.

3. Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(a) $e^z = -5i$ (b) $e^{iz} = 4$ (c) $\cos z = i\sin z$

Solution.

(a) $e^z = -5i \Leftrightarrow e^x e^{iy} = 5e^{i(\pi/2+2k\pi)} \Leftrightarrow e^x = 5, y = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow z = \ln(5) + i(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

(b) $e^{iz} = 4 \Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = 4e^{i2k\pi} \Leftrightarrow e^{-x} = 4, y = 2k\pi \Leftrightarrow z = -\ln(4) + i(2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\cos z = i\sin z \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = e^{iz} - e^{-iz} \Leftrightarrow e^{-iz} = 0$ qui est impossible car $e^{iz} \neq 0$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Solution. Soit $z = x + iy$, alors :

$|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2+2ixy}| = |e^{x^2-y^2}||e^{2ixy}| = e^{x^2-y^2} \leq e^{x^2+y^2} = e^{|z|^2}$.

5. Représenter A sur le z-plan et $B = f(A)$ sur le w-plan dans les cas suivants :

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $f(z) = z^2$.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, \arg(z) \in [0, \pi/4]\}$ et $f(z) = z^3$.

(c) $A = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi\}$ et $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

(d) $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq x \leq 1$ et $0 < y \leq \pi i\}$ et $w = f(z) = e^z$.

Solution.

(a) Soient $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $w = f(z) = z^2$. A représente le cercle unité dans le z-plan. Puisque $|w| = |z^2| = |z|^2 = 1$ alors $B = f(A) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ qui est le cercle unité dans w-plan.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, \arg(z) \in [0, \pi/2]\}$ et $w = z^3$.

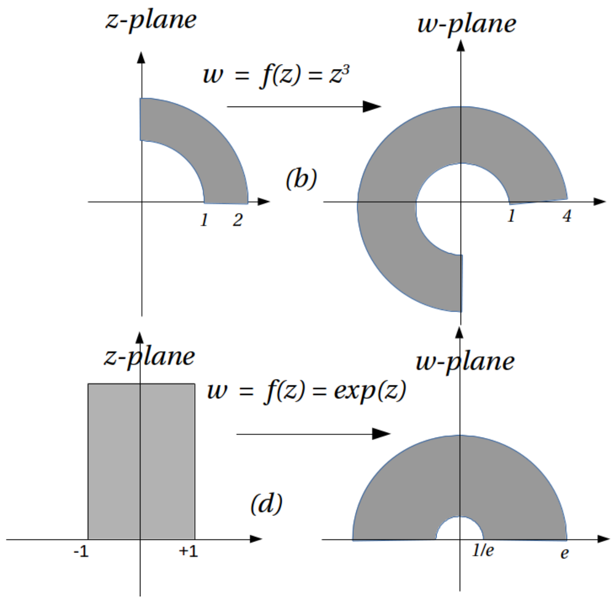
Puisque $|w| = |z^3| = |z|^3$ et $1 \leq |z| \leq 2$ alors $1 \leq |w| \leq 4$.

De plus puisque $\arg(w) = \arg(z^3) = 3\arg(z)$ et $\arg(z) \in [0, \pi/2]$, alors $\arg(w) \in [0, 3\pi/2]$.

Donc $B = f(A)$ représente les 3/4 de la couronne $1 \leq |w| \leq 4$ avec $\arg(w) \in [0, 3\pi/2]$.

(c) $A = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi\}$ et $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$. A représente $\mathbb{C} - \{0\}$ le z-plan sauf le l'origine. $w = f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$ c.a.d. que $|w| = 1$. Donc $B = f(A)$ représente un cercle de rayon unité dans le w-plan.

(d) $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq x \leq 1$ et $0 < y \leq \pi\}$ et $w = f(z) = e^z$. A représente le rectangle avec les coins diagonales $(-1, 0)$ et $(1, \pi)$. Puisque $w = e^z = e^{x+iy}$ on a $|w| = e^x$ et $\arg w = y$. De plus puisque $-1 \leq x \leq 1$ alors $e^{-1} \leq |w| \leq e$ et $0 < \arg w < \pi$. Donc $B = f(A)$ représente une demi couronne de centre 0 et de rayons e^{-1}, e avec $\mathrm{Im}\,(w) > 0$.



6. Soit $z = x + iy$, montrer que:

(a) $\sin(iz) = i \sinh z$

(b) $\cosh(iz) = \cos z$

(c) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

(d) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

Solution.

(a) Puisque $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ alors $\sin(iz) = \dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \sinh z$.

(b) Puisque $\cosh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ alors $\cosh(iz) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \cos z$.

(c) $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$ et $e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \sin x)$. Donc on a

$\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2 = \cos x(e^y + e^{-y})/2 - i \sin x(e^y - e^{-y})/2 = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

(d) $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y =$

$\cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x) \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

7. Montrer que $|\cos(\pi + i \log(2 + \sqrt{5}))| = \sqrt{5}$; que peut-on conclure?

Solution. Puisque $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ alors

$|\cos(\pi + i \log(2 + \sqrt{5}))|^2 = \cos^2(\pi) + \sinh^2[\ln(2 + \sqrt{5})]$.

Mais $\sinh[\ln(2+\sqrt{5})] = \dfrac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \dfrac{(2 + \sqrt{5}) - (2 + \sqrt{5})^{-1}}{2} = \dfrac{(2 + \sqrt{5})^2 - 1}{2(2 + \sqrt{5})} = 2$.

Finalement on a $|\cos(\pi + i \log(2 + \sqrt{5}))|^2 = \cos^2(\pi) + \sinh^2[\ln(2 + \sqrt{5})] = 5$, d'où

$|\cos(\pi + i \log(2 + \sqrt{5}))| = \sqrt{5} > 1$.

On peut donc conclure que $|\cos z| \leq 1$ est vraie dans $\mathbb{R}$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{C}$.

8. Écrire $\arctan z$ en fonction $\ln z$ puis déduire la forme algébrique de $\arctan(1 + i)$.

Solution. Soit $w = \arctan(z) \Rightarrow z = \tan(w) = \dfrac{\sin w}{\cos w} = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$ et on a donc

$iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw} \Rightarrow iz(e^{i2w} + 1) = e^{iw} - 1 \Rightarrow e^{i2w}(iz - 1) = -iz - 1 \Rightarrow$

$e^{i2w} = \dfrac{1 + iz}{1 - iz} \Rightarrow i2w = \log \dfrac{1 + iz}{1 - iz} \Rightarrow w = \arctan z = \dfrac{1}{2i} \log \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$.

En utilisant l'identité précédente on obtient

$\arctan(1 + i) = \dfrac{1}{2i} \log \dfrac{1 + i(1 + i)}{1 - i(1 + i)} = \dfrac{1}{2i} \log \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{2}{5}\right)$

$= -i\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\ln(5) + i(\arctan(-2) + 2k\pi)\right) = \left[-\dfrac{1}{2}\arctan(2) + k\pi\right] - i\dfrac{\ln(5)}{4};\ k \in \mathbb{Z}$.

9. (a) Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Montrer que la détermination principale de la fonction multiforme $f(z) = z^i$ est donnée par : $e^{-\theta}\left[\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)\right]$.

(b) Si $|z| = 1$, montrer que $f(z) = z^i$ représente une infinité de nombres réels, puis donner la détermination principale de $f(z)$.

Solution.

(a) Soit $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Alors la détermination principale de $f(z) = z^i$ est donnée par :

$f(z) = z^i = e^{i \operatorname{Log} z} = e^{i(\ln r + i\theta)} = e^{(-\theta + i \ln r)} = e^{-\theta} e^{i \ln r} = e^{-\theta}[\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)]$.

(b) Si $|z| = r = 1$, alors on a $\ln r = \ln 1 = 0$ et on obtient

$z^i = e^{-\theta + 2k\pi}[\cos(0) + i \sin(0)] = e^{-\theta + 2k\pi}; k \in \mathbb{Z}$. Donc $f(z) = z^i$ représente une infinité de nombres réels. Si on considère la détermination principale alors $z^i = e^{-\operatorname{Arg} z}$.