

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences – Département de Mathématiques
Analyse Complexe – 2ème Année LMD S4 – 2016

TD 4. Fonctions Analytiques

1. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur \mathbb{C} :

(a) $f(z) = \bar{z}$

(b) $f(z) = \operatorname{Re} z$

(c) $f(z) = e^z$.

2. Montrer que les fonctions suivantes sont nulle-part analytiques.

(a) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$

(b) $f(z) = y + ix$

(c) $f(z) = 3z - 5\bar{z} + 7$

3. Montrer que les fonctions suivantes sont analytiques. Donner le domaine d'analyticité.

(a) $f(z) = (4x^2 + 5x - 4y^2 + 9) + i(8xy + 5y - 1)$

(b) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

(c) $f(z) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}$

4. Trouver les réels a, b, c , et d tels que f soit partout analytique.

(a) $f(z) = (3x - y + 5) + i(ax + by - 3)$

(b) $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$

5. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur les courbes indiqu es mais sont nulle-part analytiques.

(a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy; \quad y = 0$

(b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2; \quad xy = 0$

6. Montrer que si f est analytique sur un domaine D et $|f(z)| = c$ pour tout $z \in D$ alors f est constante dans D .

7. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytique sur un domaine D . Est-ce que $g(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ peut être analytique sur le domaine D ? Justifier votre réponse.

8. Montrer que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans un domaine D , alors $u_x v_x + u_y v_y = 0$.

9. Montrer que $u(x, y)$ est harmonique dans un domaine approprié D . Trouver une conjugu e harmonique $v(x, y)$ de u telle que $f = u + iv$ soit analytique.

(a) $u(x, y) = x$

(b) $u(x, y) = y$

(c) $u(x, u) = x^2 - y^2$

10. Trouver un domaine d'analyticité et la d riv e de chacune des fonctions suivantes:

(a) $f(z) = \cos(ie^z)$

(c) $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z - i)}{z^2 + 1}$

(b) $f(z) = 3z^2 - e^{3iz} + i \operatorname{Log} z$

(d) $f(z) = z^{1+i}$