Exercice 1. Calculer, en utilisant une formule intégrale de Cauchy, l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos t} dt.$$

Astuce : Utiliser la courbe $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Corrigé exercice 1. En utilisant $\gamma(t) = z$ on trouve

$$dt = -ie^{-it}dz = -iz^{-1}dz \text{ et } \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Donc

$$I = \int_\gamma \frac{-iz^{-1}}{3 + z + z^{-1}} dz = -i \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} = -i \int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)(z - z_1)}$$

où $z_0 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ sont les zéros de $z^2 + 3z + 1$. Noter que seulement z_0 se trouve à l'intérieur du γ. En plus la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z - z_1}$$

est holomorphe dans un domaine qui contient γ et son intérieur. Ainsi on peut utiliser la formule de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

et on trouve que

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{z_0 - z_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 2. Soient $a > 0$, $b > 0$ et

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

(a) Soient $a \neq b$. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'intégrale $I(a, b)$.
Justifier soigneusement toutes les étapes de votre calcul.
Astuce : Considerer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

(b) Calculer

$$\lim_{b \to a} I(a, b).$$

(c) Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

Astuce : Utiliser la propriété

$$\lim_{b \to a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{b \to a} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

et l'exercice précédent.

Corrigé exercice 2.

(a) Le dénominateur de l'intégrant, $(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$ ne s'annule jamais pour $x \in \mathbb{R}$; de plus $\left| \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \right| = O(\frac{1}{x^4})$ si $x \to \pm\infty$, ce qui assure que l'intégrale existe. La fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz} z}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = \frac{e^{iz}}{(z - ia)(z + ia)(z - ib)(z + ib)}$$

a 4 pôles simples. Ces poles sont ia, $-ia$, ib et $-ib$.

Soit $R > \max\{a, b\}$, $\gamma_R^1(t) = t$ avec $t \in [-R, R]$ et $\gamma_R^2(t) = Re^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$ et soit γ_R la somme. Par le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}(f, z = ia) + \text{Res}(f, z = ib)).$$

Or,

$$\text{Res}(f, z = ia) = \lim_{z \to ia} (z - ia)f(z) = \frac{e^{ia}}{2iai(a + b)i(a - b)} = i\frac{e^{ia}}{2a(a^2 - b^2)},$$

$$\text{Res}(f, z = ib) = -i\frac{e^{ib}}{2b(a^2 - b^2)}.$$

Donc on obtient

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \pi\frac{ae^{-b} - be^{-a}}{ab(a^2 - b^2)}.$$

On va montrer que $\int_{\gamma_R^2} f(z)dz$ tend vers 0 si R tend vers ∞ :

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f(z)dz \right| \leq R \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-R\sin(t)}}{(R^2e^{2it} + a^2)(R^2e^{2it} + b^2)} \right| dt.$$

Pour tout $t \in [0, \pi]$, $e^{-R\sin t} \leq 1$. De plus, $\left| \frac{1}{(R^2e^{2it}+a^2)(R^2e^{2it}+b^2)} \right| \leq \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}$. Donc

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f(z)dz \right| \leq R \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} dt = \frac{R\pi}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)}$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

Donc

$$I(a, b) = \Re \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R^1} f(z)dz + 0 = \Re \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \pi\frac{ae^{-b} - be^{-a}}{ab(a^2 - b^2)}.$$

(b)

$$\lim_{b\to a} I(a,b) = \pi \lim_{b\to a} \frac{ae^{-b} - be^{-a}}{ab(a^2-b^2)} = (*)$$

Par le théorème de l'Hospital :

$$(*) = \pi \frac{e^{-a}(1+a)}{2a^3}.$$

(c) Il suffit de poser $a = 1$ dans la réponse de l'exercice précédent.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \pi \frac{e^{-1}(1+1)}{2 \cdot 1^3} = \frac{\pi}{e}$$

Exercice 3.

(a) Calculer

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}.$$

(b) Soit $a > 0$. Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + a^3}.$$

<u>Astuce</u> : Trouver une courbe simple fermée γ qui passe par les points 0, R, $Re^{i\frac{2\pi}{3}}$, et qui n'entoure qu'un seul pôle.

Corrigé exercice 3.

(a) On va utiliser le Thérorème des résidus pour l'intégrale

$$\int_{\Gamma^R} \frac{z^2 \, dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2},$$

où Γ^R est le contour donné par $\Gamma^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$ avec $\Gamma_1^R = \{z \in \mathbb{R} \mid -R \leq z \leq R\}$ et $\Gamma_2^R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Les pôles sont $3i, -3i$ (ordre 1) et $2i, -2i$ (ordre 2). Seul $3i$ et $2i$ sont dans Γ^R et les résidus en ces pôles sont

$$\mathrm{Res}(f, 3i) = \lim_{z\to 3i} (z-3i) f(z) = \frac{3i}{50},$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, 2i) &= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left((z-2i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to 2i} \left(\frac{2z(z^2+9)(z+2i)^2 - (2z(z+2i)^2 + 2(z^2+9)(z+2i))z^2}{(z^2+9)^2(z+2i)^4}\right) \\
&= \frac{-13i}{200}.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_2^R} \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2}\right| &\leq \pi R \max_{|z|=R}\left\{\left|\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}\right|\right\} \\
&= \pi R \max_{|z|=R}\left\{\frac{1}{|z^4||(1+9/z^2)(1+4/z^2)^2|}\right\} \\
&\leq \pi R \frac{1}{R^4}\max_{|z|=R}\left\{\frac{1}{|(1+9/z^2)(1+4/z^2)^2|}\right\} \\
&\leq \pi R \frac{C}{R^4} \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque} \qquad R \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

En effet $\frac{1}{|(1+9/z^2)(1+4/z^2)^2|}$ tend vers 1 lorsque $z \to \infty$. Donc $\frac{1}{|(1+9/z^2)(1+4/z^2)^2|} < C$ si R est assez grand. Donc par le Théorème des résidus, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,3i)+\mathrm{Res}(f,2i)\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{200}\right) = \frac{\pi}{100},$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200},$$

car la fonction $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$ est paire.

(b) L'intégrale est bien définie car $\frac{1}{x^3+a^3} = o(x^{-2})$ si $x \to \infty$.

Soit $R > a$ et soit γ la courbe fermée définie par

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

où $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0,R]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, et $\gamma_3(t) = (R-t)e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $t \in [0,R]$. On définit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^3+a^3}.$$

Le point $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ est le seul pôle de f à l'intérieur de γ. En conséquence

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,z_0) = 2\pi i \left(\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=z_0}(z^3+a^3)\right)^{-1} = 2\pi i\left(3z_0^2\right)^{-1} = \frac{2\pi i}{3a^2}e^{-2\pi i/3}.$$

En utilisant

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0 \text{ si } R \to \infty,$$

car $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, et l'égalité

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -e^{2\pi i/3}\int_0^R f(x)dx,$$

on obtient

$$\lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)dz = (1-e^{2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}dx = 2\pi i\left(\frac{2\pi i}{3a^2}e^{-2\pi i/3}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}dx &= \frac{2\pi i}{3a^2}\,\frac{e^{-2\pi i/3}}{1-e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi}{3a^2}\left(\frac{2i}{e^{-i\pi/3}-e^{i\pi/3}}\right)e^{-i\pi} \\
&= \frac{\pi}{3a^2\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

(a) On cherche à calculer $I = \int_0^\infty (x^4+1)^{-1}dx$.
Astuce : Trouver $a, b \in \mathbb{C}$ de sorte que $(x^4+1)^{-1} = a(x^2+i)^{-1} + b(x^2-i)^{-1}$.

(b) Soient m, n appartenant a $\mathbb{N}$, $0 < m < n$. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n}\sin^{-1}(\frac{m\pi}{n}).$$

Astuce : Trouver une courbe simple fermée γ qui passe par les points 0, R, $Re^{i\frac{2\pi}{n}}$, et qui n'entoure qu'un seul pôle.

Corrigé exercice 4.

(a) Comme $\int_1^\infty (x^4+1)^{-1}dx < \int_1^\infty x^{-4}dx$, l'intégrale est bien définie. En tenant compte que

$$\lim_{z\to\infty} zg(z) = 0,$$

où $g(z) = (z^2+i)^{-1}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^\infty (x^2+i)^{-1}dx = 2\pi i \text{Res}(g,u)$$

où $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ est le seule pôle de g avec partie imaginaire supérieure à 0. En utilisant

$$\text{Res}(g,u) = \frac{1}{g'(u)} = \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)},$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^\infty (x^2+i)^{-1}dx = \frac{2\pi i}{\sqrt{2}(-1+i)}.$$

D'une manière similaire on trouve

$$\int_{-\infty}^\infty (x^2-i)^{-1}dx = 2\pi i \text{Res}(h,v) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2}(1+i)},$$

où $h(z) = (z^2-i)^{-1}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.
Puisque $a = \frac{i}{2}$ et $b = -\frac{i}{2}$, on a finalement

$$2I = a\int_{-\infty}^\infty (x^2+i)^{-1}dx + b\int_{-\infty}^\infty (x^2-i)^{-1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) L'intégrale est bien définie car $\frac{x^{m-1}}{1+x^n} = o(x^{-1})$ si $x \to \infty$.
Soit $R > 0$ et soit γ la courbe fermée définie par

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

où $\gamma_1(t) = tR$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$, et $\gamma_3(t) = (R-t)e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $t \in [0,R]$. On définit la fonction

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}.$$

Le point $c = e^{i\frac{\pi}{n}}$ est le seul pôle de f à l'intérieur de γ. En conséquence

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,c) = 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\bigg|_{z=c} \frac{1+z^n}{z^{m-1}} \right)^{-1} = 2\pi i \left(-\frac{c^m}{n} \right).$$

En utilisant

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0 \text{ si } R \to \infty,$$

car $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, et l'égalité

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -c^{2m} \int_0^R f(x)dx,$$

on obtient $\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = (1-c^{2m}) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = 2\pi i (-\frac{c^m}{n})$. D'où, en utilisant $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, on trouve le résultat cherché.