U.S.T.H.B. 2014-2015 Semestre 1

Faculté de Mathématiques

Fonctions de plusieurs variables

$3^{\text{ème}}$ année LAC

Test $n^0 2$ - 07 décembre 2014. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5,5 pts.) : Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1)}\ f(x,y)=x^3+y^3, \qquad 2)\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^4-2x-2y-4z.$$

==

Réponse.

1) $f(x,y)=x^3+y^3$:

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Un simple calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=9x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=9y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\right\}$ i.e. $\{3x^2=0,\ 3y^2=0\}$. Ce système admet une unique solution qui est $s=(0,0)$.

En ce point critique on a $p=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0$, $q=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$, $r=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$ et donc $pr-q^2=0$.

Alors le théorème des conditions suffisantes d'existence d'un extremum ne s'applique pas.

On remarque que pour $t>0$ au voisinage de 0 :

$$f(t,0)=t^3>0=f(0,0) \quad \text{et} \quad f(-t,0)=-t^3<0=f(0,0).$$

Par conséquent le point critique $s=(0,0)$ ne figure pas un extremum pour la fonction f.

2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^4-2x-2y-4z$:

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x-2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=4z^3-4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=12z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\{2x-2=0,\ 2y-2=0,\ 4z^3-4=0\}$.

D'où la fonction f possède un seul point critique $s=(1,1,1)$.

La matrice hessienne de f en $s=(1,1,1)$ est

$$H(1,1,1)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1=2, \lambda_2=2, \lambda_3=12$. Comme ils sont tous strictement positives, alors f admet un minimum local au point $s=(1,1,1)$.

==

Exercice 2 (3,5 pts.) : Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet un minimum local où

$f(x,y)=x^3+y^2-3ax-2y.$

==

Réponse.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3a,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-2,$$

$$p=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2,\ q=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0.$$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\right\}$

i.e. $\{3x^2-3a=0,\ 2y-2=0\}$. Si $a<0$, la fonction f n'a aucun point critique.

Si $a=0$, la fonction f admet un seul point critique $s=(0,1)$. En ce point critique on a $pr-q^2=0$ et la fonction f n'a aucun extremum car pour $t>0$, $f(t,1)=t^3-1>-1=f(0,1)$ et $f(-t,1)=-t^3-1<-1=f(0,1)$.

Si $a>0$, la fonction f admet deux points critiques $s_1=(-\sqrt{a},1)$ et $s_2=(\sqrt{a},1)$.

En $s_1=(-\sqrt{a},1)$ on a $pr-q^2=-12\sqrt{a}<0$. Donc la fonction f n'admet en s_1 ni maximum ni minimum local, mais un point selle.

En $s_2=(\sqrt{a},1)$ on a $pr-q^2=12\sqrt{a}>0$. Donc la fonction f admet un minimum local au point $s_2=(\sqrt{a},1)$.

On en conclut que f possède un minimum local si et seulement si $a>0$.

==

Exercice 3 (6 pts.) : Soit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y - x \leq 2\}$.

1) Dessiner le domaine D. **2)** Déterminer les bornes de l'intégrale $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$.

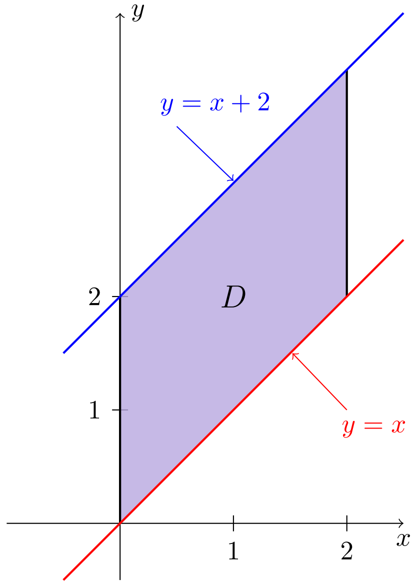
3) En déduire l'aire de D.

==

Réponse.

1) Le domaine d'intégration D s'exprime sous la forme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2, \ x \leq y \leq x + 2\right\}.$$



2) En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_x^{x+2} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

3) Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, l'intégrale $I = \iint\limits_D 1 dxdy = Aire\,(D)$ représente l'aire, ou la surface du domaine D.

Par conséquent

$$Aire\,(D) = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_x^{x+2} 1dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left([y]_x^{x+2} \right) dx = \int\limits_0^2 2dx = [2x]_0^2 = 4.$$