U.S.T.H.B. 2014-2015 Semestre 1 **Fonctions de plusieurs variables**

Faculté de Mathématiques **$3^{\text{ème}}$ année LAC**

Test $n^0$1 - 06 novembre 2014. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 pts.) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

==

Réponse.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)\frac{d}{dx}\left(xy\left(x^2-y^2\right)\right)-\left(xy\left(x^2-y^2\right)\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(3yx^2-y^3\right)-\left(yx^3-xy^3\right)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2\right)\frac{d}{dy}\left(xy\left(x^2-y^2\right)\right)-\left(xy\left(x^2-y^2\right)\right)\frac{d}{dy}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-3xy^2\right)-\left(yx^3-xy^3\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x\left(y^4+4x^2y^2-x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Pour $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-x\left(y^4+4x^2y^2-x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pour les dérivées partielles secondes croisées on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{x^4}-0}{x} = 1$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y^5}{y^4}-0}{y} = -1.$$

D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

==

Exercice 2 (6 pts.) :

1) À l'aide du changement $\xi = x + y,\ \eta = x - y$ transformer l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ en une équation de la forme $\dfrac{\partial f}{\partial \eta} = a, (a \in \mathbb{R})$.

2) Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$.

==

Réponse.

1) Comme $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 1$ et $\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = -1$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Il vient alors que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 2\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

D'où $\dfrac{\partial f}{\partial \eta} = \dfrac{1}{2}$.

2) En intégrant par rapport à η on obtient $f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta + g(\xi)$ où g est une fonction réelle quelconque d'une variable réelle.

Par conséquent $f(x, y) = \frac{1}{2}(x - y) + g(x + y)$.

==

Exercice 3 (4 pts.) : Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage du point $(0, 0)$ pour la fonction f définie par $f(x, y) = e^x (1 + \sin y)$.

==

Réponse.

Le développement de Taylor d'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables de classe $\mathcal{C}^2$ est

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} H(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

et $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice hessienne de f.

Dans le cas particulier des fonctions de deux variables i.e. $n = 2$, $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$, le développement de Taylor d'ordre 2 est donné par la formule

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 \right) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

Dans notre cas on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x (1 + \sin y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = e^x \cos y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x (1 + \sin y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin y.$$

Il vient

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

D'où

$$f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{1}{2} \left(h_1^2 + 2 h_1 h_2 \right) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$