U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques $ **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

Test $n^0 1$ - 12 avril 2014. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (3 pts.) : Calculer **a)** $\text{Log}\,(1-i)$ **b)** $(1-i)^i$.

==

Réponse.

a) $\text{Log}(1-i) = \ln(|1-i|) + i \arg(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

b) $$(1-i)^i = e^{i\,\text{Log}\,(1-i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

$$= e^{\left(\frac{\pi}{4}-2k\pi\right)}\left(\cos\left(\ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

==

Exercice 2 (3 pts.) : Séparer les parties réelle et imaginaire de $f(z) = \overline{z}^2 + i\ z$.

==

Réponse. On a

$$f(z) = \overline{z}^2 + i\ z = (x-iy)^2 + i(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + ix - y$$

$$= x^2 - y^2 - y + i(x - 2xy).$$

Alors $\text{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 - y$ et $\text{Im}(f(z)) = x - 2xy$.

==

Exercice 3 (4 pts.) : Examiner si la fonction $f(z) = x + 2ye^x + i(y + y^2e^x)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

==

Réponse.

Si les dérivées partielles de u et v sont continues dans $\mathbb{C}$, les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a $u = x + 2ye^x$ et $v = y + y^2e^x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2ye^x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 2ye^x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y^2e^x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites, la fonction f est donc n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

==

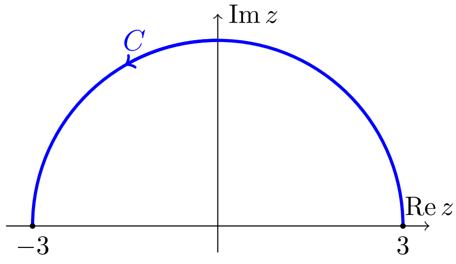
Exercice 4 (5 pts.) : Calculer $\displaystyle\int_C (\overline{z}^2 + i\ z)\, dz$ le long du demi cercle $|z| = 3$ de 3 à -3 dans le sens direct.

==

Réponse.

L'arc de 3 à -3 du cercle $|z| = 3$ peut être paramétré par $z = 3e^{it},\ t \in [0, \pi]$.

Les points 3 et -3 de l'arc, correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = \pi$.



L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\pi} \left\{ \left(3e^{-it}\right)^2 + 3ie^{it} \right\} d\left(3e^{it}\right) &= \int_0^{\pi} \left(9e^{-2it} + 3ie^{it}\right) 3ie^{it} dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(27ie^{-it} - 9e^{2it}\right) dt \\
&= \left[-27e^{-it} + \tfrac{9}{2}ie^{2it}\right]_0^{\pi} \\
&= -27e^{-i\pi} + \tfrac{9}{2}ie^{2i\pi} - \left(-27 + \tfrac{9}{2}i\right) \\
&= 27 + \tfrac{9}{2}i + 27 - \tfrac{9}{2}i = 54.
\end{aligned}$$