U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 **Math 4 : Analyse complexe**

Faculté de Mathématiques $ **$2^{ème}$ Lic, ST-GP, Section D**

Test $n^0 2$ - 17 mai 2014. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Matricule :**..............................

Prénom :.. **Groupe :**..............................

==

Exercice 1 (7 pts.) : Soit C le cercle unité $|z| = 1$.

a) En utilisant le théorème de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{1}{2} z dz$. (Justifier votre réponse).

b) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{4}{z} dz$ et $\int_C \frac{1}{2z^3} dz$.

c) En déduire $\int_0^{2\pi} (3 + 2\cos^2 \theta)\, d\theta$.

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

==

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{1}{2} z$ est holomorphe dans la courbe fermée simple C, donc d'après le théorème de Cauchy $\int_C \frac{1}{2} z dz = 0$.

b) Pour $f(z) = 1$ et $z_0 = 0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $\int_C \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0)$.

Si $n = 0$, et $n = 2$, on obtient

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i, \quad \int_C \frac{1}{z^3} dz = 0.$$

Alors

$$\int_C \frac{4}{z} dz = 8\pi i, \quad \int_C \frac{1}{2z^3} dz = 0.$$

c) On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ ou $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (3 + 2\cos^2\theta)\, d\theta &= \int_C \left(3 + \tfrac{2}{4}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)^2\right) \frac{dz}{iz} = \tfrac{1}{i} \int_C \frac{1}{z} \left(3 + \tfrac{1}{2}\left(z^2 + 2z\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)\right) dz \\
&= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{z} \left(3 + \tfrac{1}{2} z^2 + 1 + \frac{1}{2z^2}\right) dz = \frac{1}{i} \int_C \left(\frac{4}{z} + \tfrac{1}{2} z + \frac{1}{2z^3}\right) dz \\
&= \frac{1}{i} \int_C \frac{4}{z} dz + \frac{1}{i} \int_C \tfrac{1}{2} z dz + \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{2z^3} dz = \frac{1}{i} 8\pi i = 8\pi.
\end{aligned}$$

==

Exercice 2 (8 pts.) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz$ où C désigne le cercle $|z| = \frac{3}{2}$ dans le sens direct. *Indication :* $\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-1}{z-1}$.

c) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 1$.

==

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ possède deux pôles simples en $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$.

Le résidu en $z_1 = 1$ est

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Le résidu en $z_2 = 2$ est

$$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z}{z-1} = \frac{2}{2-1} = 2.$$

b) De $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{2}{z-2} + \dfrac{-1}{z-1}$, on tire

$$\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz = \int_C \frac{2}{z-2}dz + \int_C \frac{-1}{z-1}dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$ donne

$$\int_C \frac{2}{z-2}dz = 0, \quad \int_C \frac{-1}{z-1}dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i,$$

car $z_1 = 1$ est à l'intérieur de C, mais $z_2 = 2$ est à l'extérieur de C.

L'intégrale considérée vaut donc $0 + (-2\pi i) = -2\pi i$.

c) Soit $z - 1 = u$. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)(z-2)} &= \frac{2}{z-2} + \frac{-1}{z-1} = \frac{2}{u-1} - \frac{1}{u} = -\frac{1}{u} - \frac{2}{1-u} \\
&= -\frac{1}{u} - 2\left(1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\right) \\
&= -\frac{1}{u} - 2 - 2u - 2u^2 - 2u^3 - \ldots \\
&= -\frac{1}{z-1} - 2 - 2(z-1) - 2(z-1)^2 - 2(z-1)^3 - \ldots.
\end{aligned}$$