

Chapitre I : Équations de Maxwell

examens et exo corrigés et cours à
www.ExoCo-lmd.com

I.1 Historique

En 1678, *Christian Huygens* cherche à comprendre les phénomènes de réflexion et réfraction de la lumière. Il émet l'hypothèse que la lumière est une onde dont la vitesse de propagation est inversement proportionnelle aux indices optiques des milieux traversés. Il montre que l'on peut remplacer une source rayonnante par les éléments d'onde répartis sur une surface à un instant donné et déterminer ainsi les ondes reçues de proche en proche. Ce principe est encore très utilisé de nos jours.

En 1819, *Augustin FRESNEL* démontre la nature ondulatoire de la lumière, après avoir observé puis mis en équation les phénomènes de diffraction. On lui doit aussi le concept des « zones de *Fresnel* ».

En 1865, *James Clerk MAXWELL* publie une théorie unifiant les phénomènes électriques, magnétiques et lumineux. Cette théorie révolutionnaire est résumée par quatre formules constituant la base théorique incontournable de la propagation des ondes électromagnétiques.

En 1887, *Heinrich HERTZ* génère et détecte à distance une onde électromagnétique dans la gamme des ondes métriques, confirmant ainsi la théorie de Maxwell. La radioélectricité est née, mais elle restera du domaine des laboratoires pendant dix ans : cohéreur d'*Edouard BRANLY*, circuits accordés de *TESLA*, bobines de *RUMKORFF*, antennes de *POPOV*,...

En 1897, réunissant tous ces éléments, *Eugène DUCRETET*, obtient une portée de 4 km dans Paris.

Ayant convaincu les anglais de l'intérêt des ondes radio pour communiquer avec les navires en mer, *Guglielmo MARCONI* effectue en 1898 une brillante démonstration entre l'île de Wight et un bateau. Il obtient ensuite une liaison de 46 km entre Wimereux et les côtes anglaises le 28 mars 1899.

De 1900 à 1920 la technique évolue : détecteur électrolytique de *FERRIE*, diode de *FLEMING*, triode de *LEE DE FOREST*,... Les portées s'allongent sans que l'on sache nécessairement tout expliquer. La première liaison transatlantique entre la Cornouaille et Terre-neuve est établie par *MARCONI* le 14 décembre 1901. Les supports filaires ne sont plus indispensables. La télégraphie sans fil est née.

Après la guerre 1914 – 1918, les liaisons mobiles se développent sur terre et dans les airs. Aux problèmes de portée s'ajoutent des problèmes d'interférences.

Aussitôt après la guerre, la radiodiffusion prend son essor et se développe dans les bandes d'ondes longues et moyennes alors que les liaisons intercontinentales utilisent au mieux les ondes décamétriques.

En 1925, la télévision est née dans les laboratoires de *John BAIRD*. La montée en fréquence se poursuit de 1930 à 1950 dans la bande des ondes décimétriques et centimétriques grâce aux nouvelles techniques radar et faisceaux hertziens. Ces progrès ont beaucoup bénéficié des efforts de guerre.

De 1950 à 1960 les réseaux radio en modulation de fréquence et la télévision se développent autour de 100 MHz. Les liaisons par faisceaux hertziens se multiplient et occupent des bandes de fréquences de plus en plus élevées. Les exigences de qualité augmentent. Le transistor, les transmissions numériques et la commutation temporelle font leur apparition. La décennie 1961 – 1970 voit l'éclosion des transmissions par satellite. La montée en fréquence se poursuit car les ondes métriques sont pratiquement saturées. Les circuits intégrés et les ordinateurs progressent rapidement et permettent le développement de la commutation temporelle.

La période 1970 – 1990 voit la mise en service des techniques numériques et des satellites.

1.2 Rappels sur les opérateurs scalaires et vectoriels

1.2.1 Opérateur gradient

Le gradient est un vecteur obtenu à partir d'un champ de scalaires. Dans un système de coordonnées donné, chaque composante du gradient correspond à une dérivation par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

- En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En coordonnées cylindriques (r, θ , z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

- En coordonnées sphériques (r, θ , φ) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\varphi)} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

I.2.2 Opérateur divergence

La divergence est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque terme correspond à une dérivation de l'une des composantes du vecteur par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

- En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\text{div}(\vec{W}) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

- En coordonnées cylindriques (r, θ , z) :

$$\text{div}(\vec{W}) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques (r, θ , φ) :

$$\text{div}(\vec{W}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot W_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial(W_\theta \cdot \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}$$

I.2.3 Opérateur rotationnel

Le rotationnel est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque composante du rotationnel correspond à des dérivations par rapport aux deux autres coordonnées d'espace.

- En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{W}) = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{u}_x + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{u}_y + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{u}_z$$

- En coordonnées cylindriques (r, θ , z) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{W}) = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \right) \cdot \vec{u}_r + \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) \cdot \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r W_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{u}_z$$

- En coordonnées sphériques (r, θ , φ) :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{W}) = & \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \left(\frac{\partial(W_\varphi \cdot \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial \varphi} \right) \cdot \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r W_\varphi)}{\partial r} \right) \cdot \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r W_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

I.2.4 Opérateur laplacien

Le laplacien est un opérateur de dérivation spatiale qui peut s'appliquer à un champ de scalaires ou à un champ de vecteurs.

L'expression du laplacien ΔU d'un champ de scalaires U est :

$$\Delta U = \text{div}(\vec{\text{grad}} U)$$

Le laplacien d'un champ de scalaires est un scalaire et son calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient et divergence précédemment définis.

L'expression du laplacien $\Delta \vec{W}$ d'un champ de vecteurs \vec{W} est :

$$\Delta \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W})$$

Le laplacien d'un champ de vecteurs est un vecteur et son calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient, rotationnel et divergence précédemment définis.

I.2.5 Relations entre opérateurs

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} U) = \vec{0}$$

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$$

$$\Delta \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{W}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U \cdot V) = U \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V) + V \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(U)$$

$$\text{div}(U \cdot \vec{W}) = \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(U) + U \cdot \text{div}(\vec{W})$$

$$\text{div}(U \cdot \vec{W}) = \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(U) + U \cdot \text{div}(\vec{W})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(U \cdot \vec{W}) = U \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W}) + \overrightarrow{\text{grad}}(U) \times (\vec{W})$$

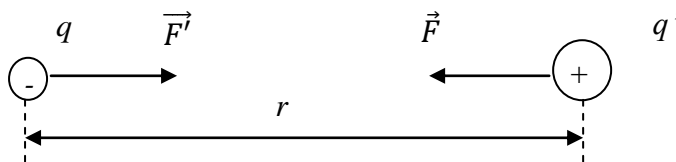
$$\text{div}(\vec{W} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W}) - \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$$

I.3 Considérations d'électromagnétisme

Sauf mention particulière, nous considérons uniquement des milieux *homogènes, permanents et linéaires*. Ces trois hypothèses fondamentales traduisent l'invariance spatiale et l'invariance temporelle des propriétés macroscopiques des milieux étudiés et la linéarité de leurs réponses à une excitation électromagnétique.

I.3.1 Equations de base

a- Loi de Coulomb



L'expression de la force qui s'exerce entre deux charges électriques statiques de signes contraires est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{I.1})$$

q et q' en coulombs (C), r en mètres (m), F en newtons (N)

Cette loi permet d'introduire une première notion importante : la permittivité diélectrique de l'air ou du vide: $\varepsilon_o = 8.85.10^{-12} F.m^{-1}$. Pour un milieu diélectrique autre que l'air, on utilise la permittivité relative : $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$.

b- Notion de champ

Les champs sont des propriétés de l'espace. On en distingue deux types :

- les uns associent, à tout point de l'espace, un simple nombre : ce sont des champs scalaires, comme la température relevée à l'intérieur d'un matériau,
- les autres associent, à tout point de l'espace, un vecteur : ce sont des champs vectoriels, comme le vent qui présente en tout point une direction, un sens de déplacement et une vitesse.

Un champ varie non seulement d'un point à l'autre de l'espace, mais aussi, en un point donné, avec le temps.

c- Champ et induction électriques

Considérons les charges q et q' . La charge q' perturbe l'espace environnant. Cette perturbation est un champ électrique, désigné par \vec{E} . Ce champ soumet la charge q à la force d'attraction définie par l'expression (I.1) :

$$\vec{F} = q.\vec{E} \quad (I.2)$$

Avec :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q'}{r^2}$$

L'expression de l'intensité du champ électrique crée par la charge q' peut être déduite :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q'}{r^2}$$

E en V/m

On associe au champ \vec{E} une induction électrique \vec{D} qui est un vecteur indépendant du milieu :

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E} \quad (I.3)$$

d- Champ et induction magnétiques

Si maintenant la charge q' est en mouvement avec une vitesse v' , elle va créer un champ magnétique H , auquel correspond une induction magnétique B :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (\text{I.4})$$

H en A/m et B en *Tesla* (T)

μ est la perméabilité magnétique du milieu. C'est une autre caractéristique du milieu. Pour le vide et pour l'air, on a :

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$$

Si la charge q arrive dans ce champ magnétique avec une vitesse v , elle va se trouver soumise à une force dirigée perpendiculairement à v et à B suivant la règle dite des trois doigts de la main droite :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{I.5})$$

e- Equation de conservation de l'électricité

Si dans un espace donné, il existe des charges électriques fixes (ρ) et en mouvement (J). En un point quelconque et à tout instant, ces deux grandeurs vérifient l'équation de conservation de l'électricité :

$$\text{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.6})$$

I.4 L'onde électromagnétique

I.4.1 Equations de *Maxwell*

Nous avons jusqu'à présent défini huit grandeurs : $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{J}, \varepsilon, \mu, \rho$. Ces grandeurs sont reliées entre-elles par les équations de *Maxwell* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{D}) = \rho \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.7})$$

\vec{E} et \vec{H} sont les champs électrique et magnétique de l'onde (champs à trois composantes spatiales), ceux-ci étant considérés comme des fonctions du temps.

\vec{J} et ρ sont les densités de courant et de charges dans le milieu considéré.

Pour un milieu conducteur, on a :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{I.8})$$

σ est la conductivité électrique.

I.4.2 Régime harmonique

Les équations (I.7) sont des relations *temporelles* entre les champs et les inductions. En utilisant la notation en champ complexe $\vec{E} = \vec{E}_o \cdot \exp(i\omega t)$, les relations précédentes deviennent:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{J} - i\omega \vec{D} \\ \text{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ \text{div}(\vec{D}) = \rho \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Dans les développements qui suivent, nous nous intéressons uniquement à des milieux dont la perméabilité est scalaire et égale à celle du vide : μ_o .

I.4.3 Conditions aux limites

Les relations de continuité sur une interface plane séparant deux milieux '1' et '2' sont:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \text{continuité des composantes normales de } \vec{B} \quad (\text{I.10})$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \text{continuité des composantes tangentielles de } \vec{E} \quad (\text{I.11})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s \quad (\text{I.12})$$

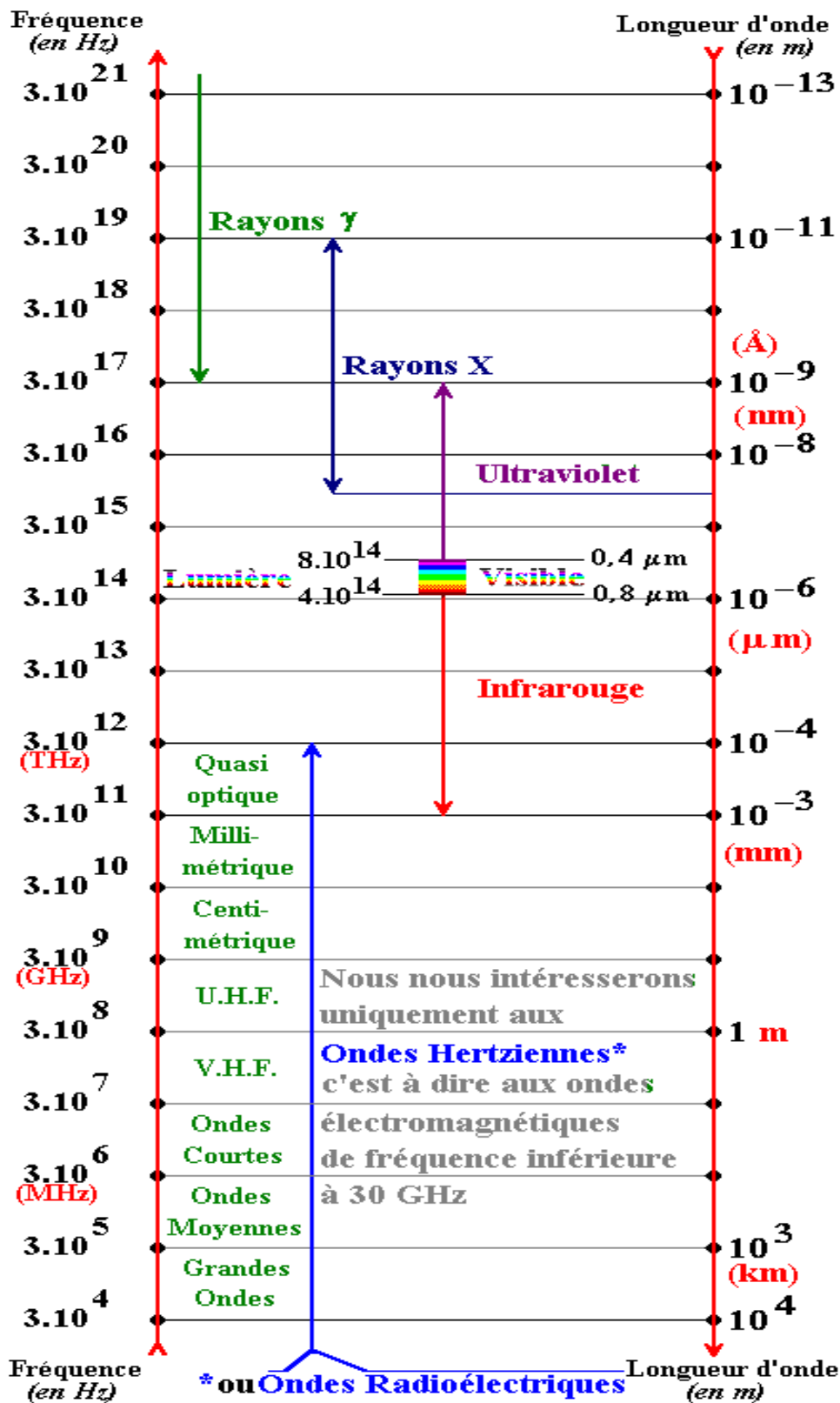
$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (\text{I.13})$$

où σ_s et \vec{J}_s sont les densités superficielles de charge et de courant à l'interface.

Dans les milieux que nous étudions, ces deux quantités sont habituellement nulles.

examens et exo corrigés et cours à
www.ExoCo-lmd.com

I.5 Spectre des Ondes Radioélectriques



I.6 Propagation libre

I.6.1 Equations de propagation

A partir des équations de *Maxwell*, on obtient, pour un milieu parfaitement diélectrique :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Ces deux équations sont du type de *Helmholtz*. Elles décrivent la propagation de l'onde.

En régime sinusoïdal, on a :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon\mu \vec{E} = \vec{0} \\ \Delta \vec{H} + \omega^2 \epsilon\mu \vec{H} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Soit : $k^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ k : constante de propagation

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \lambda \cdot f \quad (v : \text{vitesse de la lumière dans le milieu considéré}).$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\lambda : \text{longueur d'onde}).$$

Dans le cas d'un diélectrique à pertes, les équations (I.16) deviennent :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - i\omega\mu \cdot (\sigma + i\omega\epsilon) \vec{E} = \vec{0} \\ \Delta \vec{H} - i\omega\mu \cdot (\sigma + i\omega\epsilon) \vec{H} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

On définit alors une constante de propagation γ telle que :

$$\gamma^2 = i\omega\mu \cdot (\sigma + i\omega\epsilon) \quad (\text{I.17})$$

On pose alors :

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (\text{I.18})$$

I.6.2 Onde plane

Une onde en propagation libre, considérée suffisamment éloignée de l'émetteur, prend approximativement la forme d'une onde plane : les champs progressent suivant Oz (par exemple) et sont fonction du temps. Les composantes des champs se calculent à partir des équations de propagation et sont de la forme :

$$E_x(x, y, z, t) = e^{-\alpha z} \cdot \mathcal{R}\{E_0 \cdot e^{i(\omega t - \beta z)}\} \quad (\text{I.19})$$

Avec :

$e^{-\alpha z}$: facteur d'amortissement de l'onde, traduisant la disparition progressive de celle-ci dans le milieu à pertes.

$e^{-i\beta z}$: facteur de phase.

Les deux champs de l'onde plane sont perpendiculaires entre – eux et portés par des plans perpendiculaires à la direction Oz de propagation. On l'appelle onde TEM (transverse électrique et magnétique).

On montre que :

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (\text{I.20})$$

η : impédance caractéristique du milieu.

$$\text{Pour l'air ou le vide : } \eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \approx 377 \, \Omega$$

I.7 Puissance électromagnétique transportée (vecteur de *Poynting*)

La puissance transportée par l'onde est donnée, en $W.m^{-2}$, par la partie réelle du flux du vecteur de *Poynting* à travers une surface unité, dans une direction donnée. Elle s'exprime par la relation :

$$P = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{I.21})$$

selon que l'on travaille en écriture réelle ou complexe.

C'est cette puissance transportée par l'onde qui se dégrade en chaleur dans les diélectriques à pertes, rendant possibles les applications énergétiques des micro-ondes.

examens et exo corrigés et cours à
www.ExoCo-lmd.com