Université de Béjaia
Faculté des sciences de la nature et de la vie
Département des TCSN
Première année LMD

2014-2015

Examen de remplacement de mathématiques (semestre 1)

Durée : 2 Heures

Exercice n°1(8pts)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet un prolongement par continuité en zéro qui sera noté g.

2°/ Montrer que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée g' sur ce domaine.

3°/ Étudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

Exercice n°2(6.5pts)

En utilisant les développement limités calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{x^2}$$

Exercice n°3(3.5pts)

1°/ Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq -1$:

$$g(x) = \frac{x}{1+x} = a + \frac{b}{x+1}$$

2°/ En déduire une primitive de g.

Exercice n°4(2pts)

Combien de nombres différents composés de 5 chiffres différents peut-on former avec : 1,2,3,4,5,6,7,8.

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n . \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} . \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Exo n° 1

1/ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la composée de deux f^{cts} continues sur $\mathbb{R}^*$ (1)

à savoir
- $x \mapsto \sqrt{x}$
- $x \mapsto 1 - \frac{\sin x}{x}$.

Prolongement par continuité de f :

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}} = 0$ (0,5) d'où f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ (0,5)

2/ g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est la composée de deux f^{cts} dérivables sur $\mathbb{R}^*$ à savoir $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto 1 - \frac{\sin x}{x}$. (1)

$$g'(x) = \frac{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{2\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}} = \frac{-(x\cos x - \sin x)}{2x^2\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}} = \frac{\sin x - x\cos x}{2x^2\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}}$$ (1,5)

3/ Dérivabilité de g en $x = 0$: $g(0) = 0$ (0,5)

$$g'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3}} \quad (DL_3 V(0) \sin x)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$ (1,5)

$$g'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (DL_3, V(0), \sin x)$$ (1)

(puisque g est impaire donc $g'_d(0) = -\left(g'_g(0)\right)$).

$g'_d(0) \neq g'_g(0)$ donc g n'est pas dérivable en 0 (0,5)

Exo n° 2

on pose $y = \frac{1}{x}$ 0,5 alors : si $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$ 0,5

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2} \ln \frac{1}{y} \sin y)} \quad 1$$

Au $V(0)$: $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + R_3$ 1 $\Rightarrow V(0)$: $\ln \frac{1}{y}\left(y - \frac{y^3}{6}\right) = \ln\left(1 - \frac{y^2}{6}\right) = \frac{-y^2}{6} + R_2$ 1,5

d'où : $\lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2} \ln(\frac{1}{y} \sin y)} = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{-y^2}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}$ 2

Exo n° 3

1) $g(x) = x - \frac{1}{x+1}$. $\begin{cases} a = 1 & 1 \\ b = -1 & 1 \end{cases}$

2) $\int g(x)\, dx = x - \ln|x+1| + C$, $C \in \mathbb{R}$ 1,5

Exo n° 4

Le nbre de nombres différents composés des 5 chiffres différents qu'on peut former est un arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 8 d'où :

$$A_8^5 = \frac{8!}{5!} = 6720 \text{ nbres} \quad 2$$