Université de M'sila(2018/2019) Le 14/01/2018

Département des Sciences Techniques ($1^{ère}$année ST) Durée: 1^h30mn

Epreuve du 1^{er}semestre

Module: Mathématiques 01

Exercice 01(5 pts)

Soit U l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$ définie par $\forall x \in]0,+\infty[,\ U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1.
$$U^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) = \left\{x \in]0,+\infty[,\ U(x) \in \left]\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\}$$
$$= \left\{x \in]0,+\infty[,\ \tfrac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\} = [\tfrac{1}{3},3[$$

0,5 0,5

$U(]2,4]) = \{y \in]0,1[,\ \exists x \in]2,4],\ y = U(x)\}$ 0,5

Si $2 < x \leq 4$ alors $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $U(]2,4]) = \left[\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ 0,5

2 Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

On montre que U est injective et surjective

a/ l'injectivité; soient $x,\ x' \in]0,+\infty[$,

$U(x) = U(x') \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x'+1}} \Longrightarrow x = x'$ 1

alors U est injective

b/ La surjectivité, Soit $y \in]0,1[,\ y = U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \Longrightarrow x = \frac{1}{y^2} - 1$

alors $\forall\ y \in]0,1[\ \exists x = \frac{1}{y^2} - 1 \in]0,+\infty[$ tel que $y = U(x)$, donc U est surjective 1

U est injective et surjective donc elle est bijective et

$U^{-1} :]0,+\infty[\longrightarrow]0,1[$ définie par $U^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ 0,5

Exercice 02(5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur D_f le domaine de définition de f.

0,5

Sur $\mathbb{R}^*$ f est continue (rapport de deux fonctions continues), en $x_0 = 0$ on a

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 = f(0)$, alors f est continue en 0

Donc f est continue sur $D_f = \mathbb{R}$ 1

2 Etudier la dérivabilité de f.

0,5

Sur $\mathbb{R}^*$ f est dérivable (rapport de deux fonctions dérivables), au point $x_0 = 0$ on calcule

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$
$$= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{y+1}-1}{y} = \frac{1}{2}$$ 1

(par l'hopitale ou le nombre dérivé),
alors f est dérivable au point 0, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

3 Déterminer l'ensemble E des points où la fontion g définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est dérivable, et pour tout $x \in E$, exprimer $g'(x)$

g est la composée des fonctions $(x \longmapsto \arctan x)$ qu'est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $\left(x \longmapsto \frac{x-1}{x+2}\right)$ qu'est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ 01
alors g est dérivable sur l'ensemble $E = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$$g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{2x^2+2x+5}$$ 1

Exercice 03(6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f

Le premier terme non nul dans le D.L. du dénominteur est de dégrée 2, alors on effectue le D.L. à l'ordre 4

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \circ(x^4) = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$$

$$\begin{aligned}
e^{\cos(2x)} = e^{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\circ(x^4)} &= ee^{-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\circ(x^4)} \\
&= e\left[1 + (-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4) + \tfrac{1}{2}(-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4)^2 + \circ(x^4)\right] \\
&= e(1 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^4) + \circ(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)} &= \frac{e(1 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^4) + \circ(x^4) - e}{x^2 - \frac{x^4}{2} + \circ(x^4)} \\
&= \frac{e(-2 + \frac{8}{3}x^2) + \circ(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)} = e(-2 + \tfrac{8}{3}x^2)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^2) \\
&\boxed{= -2e + \tfrac{5e}{3}x^2 + \circ(x^2)}
\end{aligned}$$ 2,5

2 Déduire les valeurs $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

D'après la formule de Taylor on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \Longrightarrow f^{(n)}(0) = a_n.n!$

alors $f'(0) = a_1.1! = \boxed{0}$ 0,5 $f^{(2)}(0) = a_2.2! = \frac{5e}{3}.2! = \boxed{\frac{10e}{3}}$ 0,5 $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = a_0 = \boxed{-2e}$ 0,5

3 Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

L'équation de la tengente de la courbe de f au voisinage de 0 est $y = -2e$ 1
On a $f(x) - y = +\frac{5e}{3}x^2 + \circ(x^2) \geq 0$ alors la courbe est en dessus de sa tengente
0,5 0,75

1. **Ind:**
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Exercice 04(4pts)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

a)L'associativité, Soient x, y, $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x*y)*z = \sqrt[3]{x^3+y^3} * z &= \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3} \\ &= x * \sqrt[3]{y^3+z^3} = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3} \\ &= x * \sqrt[3]{y^3+z^3} = x*(y*z)\end{aligned}$$ 1

alors $*$ est associative

b/ L'élément neutre, soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche $e \in \mathbb{R}$, tel que $x*e = e*x = x$

$x*e = x \Longrightarrow \sqrt[3]{x^3+e^3} = x \Longrightarrow x^3+e^3 = x \Longrightarrow e = 0$, et on a $0*x = \sqrt[3]{0^3+x^3} = \sqrt[3]{x^3} = x$

Alors $\boxed{e=0}$ est 'élément neutre pour la loi $*$ 1

c/ L'inversibilité, Soit $x \in \mathbb{R}$, on cherche x' tel que $x*x' = x'*x = e$

$x*x' = e \Longrightarrow \sqrt[3]{x^3+x'^3} = 0 \Longrightarrow x^3 + x'^3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x' = -x}$ et on a 1

$-x*x = \sqrt[3]{(-x)^3+x^3} = \sqrt[3]{-x^3+x^3} = 0$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $x' = -x$ tel que $x*x' = x'*x = e$,
c'est à dire tout élément de $\mathbb{R}$ est inversible par la loi $*$

D'près a/, b/, et c/ $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe

2 Le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est-il abélien?

On a $x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3} = \sqrt[3]{y^3+x^3} = y*x$, la loi $*$ est commutative 1
alors le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est abélien.