Université de M'sila(2018/2019) Le 14/01/2018
Département des Sciences Techniques ($1^{\text{ère}}$année ST) Durée: 1^h30mn

Epreuve du 1^{er}semestre
Module: Mathématiques 01

Exercice 01(5 pts)

Soit U l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$ définie par $\forall x \in]0,+\infty[$, $U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1. Déterminer $U^{-1}\left(\left]\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$ et $U\left(]2,4]\right)$.
2. Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

Exercice 02(5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur D_f le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Déterminer l'ensemble E des points où la fontion g définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est dérivable, et pour tout $x \in E$, exprimer $g'(x)$

Exercice 03(6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f
2. Déduire les valeurs $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.
3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ind: $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Exercice 04(4pts)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

1. Montrer que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe.
2. Le groupe $(\mathbb{R},*)$ est-il abélien?.

جـــامعة "محمد بوضياف" المسيلة 2018 /2019
كلية التكنولوجيا – قسم الجذع المشترك علوم وتقنيات
مقياس: الرياضيات 1 - امتحان السداسي الأول

2019/01/14
المدة: ساعة ونصف

التمرين الأول(5ن) نعتبر التطبيق $U:]0,+\infty[\rightarrow]0,1[$ المعرف بـــــ: $U(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1). أحسب كل من $U^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\right)$ و $U([2,4])$

2). بــــرهن أن التطبيق U تقـــابلي ثم حدد U^{-1}

التمرين الثاني (5ن): لتكن الدالة الحقيقية f المعرفة كمـــا يلي

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1- أدرس استمرارية الدالة f على مجال تعريفها

2- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f

3- أوجد مجموعة النقط E التي تكون فيها الدالة g المعرفة بـ $g(x)=\arctan\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ قابلة للاشتقاق ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل $x\in E$

التمرين الثالث (6ن)

لتكن الدالـــــة $f(x)=\dfrac{e^{\cos(2x)}-e}{\ln(1+x^2)}$

1). اكتب النشر المحدود إلى الدرجة 2 في جوار 0 للدالـــــة f

2)- استنتج قيم كل من $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ f^{(2)}(0),\ f'(0)$

3)- أدرس وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمماسه في النقطة التي فاصلتها 0

يعطى:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

التمرين الرابع (4ن)

في المجمــــوعة $\mathbb{R}$ نعتبر القـــــانون الداخلي * المعرف كما يلي

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

1). بـــــرهن أن $(\mathbb{R},*)$ تشكل زمرة.

2). هل $(\mathbb{R},*)$ زمــــــــرة تبديلية؟

بالتوفيق.........