SMP5

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - AGADIR

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session normale - Février 2015
SMP5
Durée : 1h 30'

Sujet thématique proposé : stabilité d'un cerceau autour d'une nutation uniforme
Mise en œuvre par la méthode des équations de Lagrange avec multiplicateurs

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen avec $(O,\vec{z}_0)$ vertical ascendant lié à un bâti fixe (S_0). Un cerceau (S) de centre d'inertie G, de rayon a et de masse m roule sans glisser sur le plan $(\pi)=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. On repère sa position par les coordonnées (x, y, z) de G et par les angles d'Euler habituels(ψ,θ,φ). On désigne par $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ et $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires et par $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère orthonormé direct lié à (S). Le point de contact entre (S) et (π) est noté I avec $\overrightarrow{IG}=a\vec{w}$. L'axe$(G,\vec{z})$ est normal au plan du cerceau et la réaction de(π) sur (S) est représentée par un glisseur dont le support passe par le point I et de résultante $\vec{R}_I=Z\vec{z}_0$ (liaison sans frottement).

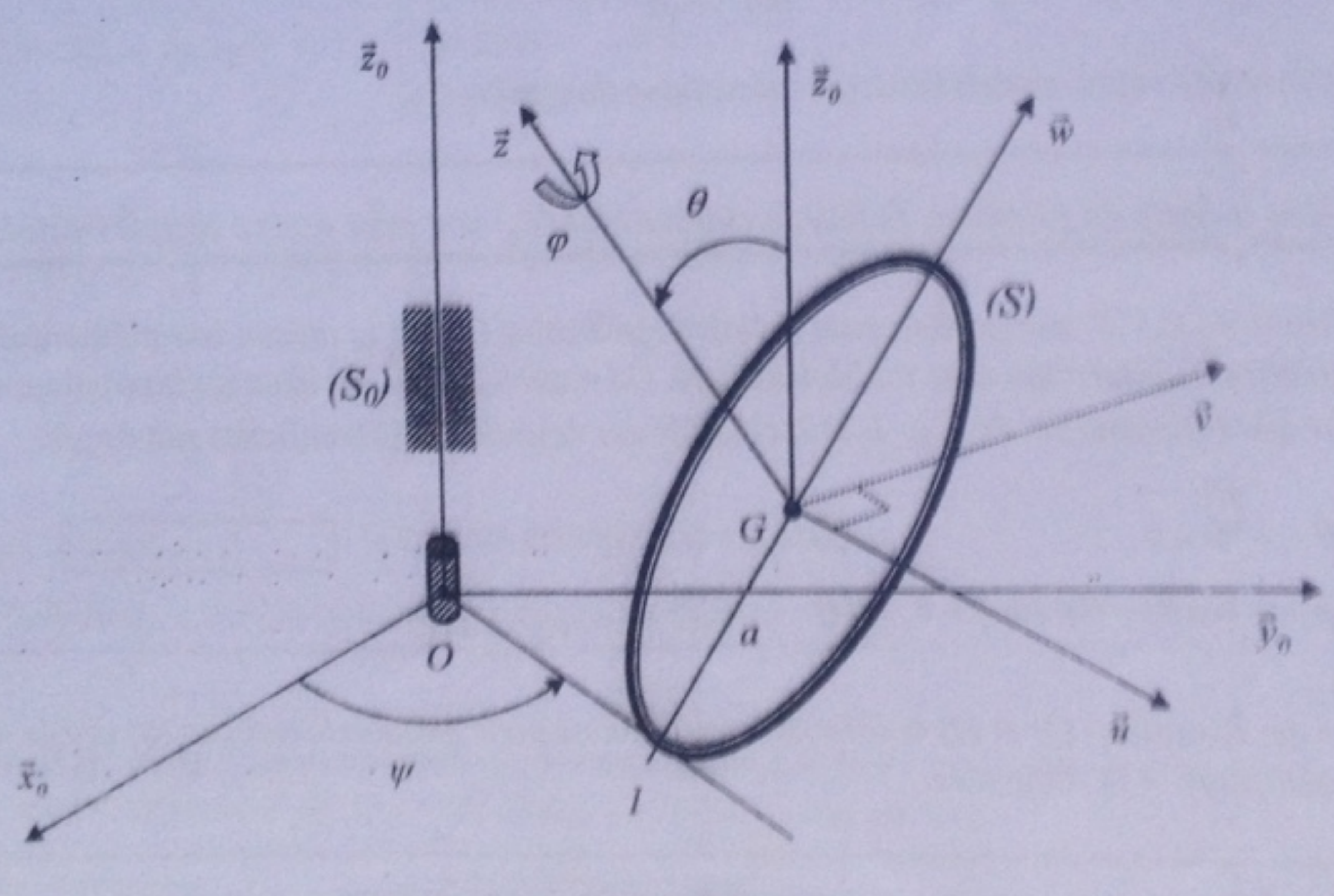


Figure : description générale du système

Q1- *Construire les figures de calcul. En déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ par ses composantes dans la base$(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$.*

Q2- *Montrer que la condition géométrique de contact entre le cerceau (S) et le plan(π) est :*

$$z = a\sin\theta \qquad (L_p)$$

Préciser la nature de cette liaison.

☞ ***Dans la suite du problème, la liaison géométrique (L_p) sera prise comme primitive.***

Q3- *Quel est le nombre de degrés de liberté du système ? Proposer alors un champ de vitesses virtuelles (C.V.V.) adéquat à l'étude de ce problème.*
Q4- *Calculer l'énergie cinétique du cerceau $T(S/R_0)$.*
Q5- *Calculer la puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au système. En déduire les composantes des forces généralisées Q_i et l'expression de la fonction de force U.*
Q6- *Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.*
Q7- *Ecrire les équations cinématiques de liaison traduisant le non-glissement en I.*
On notera (L_c) la liaison cinématique formé par ces deux équations.
Q8- *En déduire la relation :*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \sin^2\theta\dot{\theta}^2 + a^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 \qquad (1)$$

Q9- *Ecrire l'intégrale première de l'énergie cinétique et montrer, compte tenu de (1), que cette intégrale se met sous la forme:*

$$2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta = \frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\sin\theta \qquad (2)$$

où E est une constante représentant l'énergie mécanique du système.

☞ ***Dans la suite du problème, la liaison cinématique (L_c) sera prise comme complémentaire.***

Q10- *En utilisant un C.V.V. compatible avec la liaison primitive (L_p) et la liaison complémentaire (L_c), écrire les équations de Lagrange avec multiplicateurs. On notera λ_1 et λ_2 ces deux multiplicateurs.*
Q11- *Montrer que l'élimination de x, y, λ_1 et λ_2 conduit aux équations différentielles suivantes:*

$$\ddot{\psi}\sin\theta - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \qquad (3)$$

$$2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

Q12- *A partir des équations (3) et (4) étudier les mouvements pour lesquels le cerceau (S) garde une inclinaison constante $\theta = \theta_0$. Conclure.*

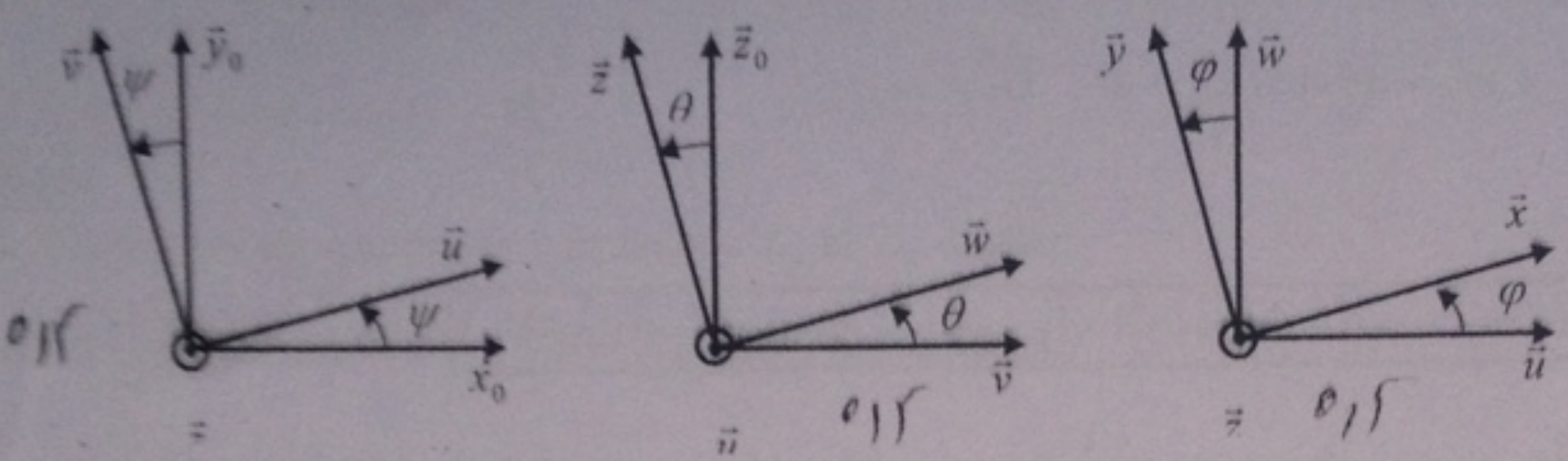
☞ ***On rappelle que la matrice centrale d'inertie du cerceau est représentée par :***

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}$$

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session normale - Février 2015
SMP5

Solution détaillée

R1- *Figures de calcul*



On en déduit que $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$

$$\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{array}\right._{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$ 0,5

R2-

$$\overrightarrow{OI}.\vec{z}_0 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}).\vec{z}_0 = 0$$

avec $\overrightarrow{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ *et* $\overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$

D'où :

0,5 $\boxed{z = a\sin\theta}$ *(Equation géométrique de contact)*

Nature de la liaison : c'est une équation de liaison holonome. 0,5

R3-

Le nombre de paramètres de position de (S) est six : $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ *mais compte tenu de l'équation de liaison* $z = a\sin\theta$, *le nombre de degrés de liberté est réduit à* **cinq** *qui sont*

$\boxed{(x, y, \psi, \theta, \varphi)}$ *et le C.V.V. est* $\boxed{(\dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{\psi}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\varphi}^*)}$

0,5 0,5

R4-

1,5 $$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{ma^2}{4}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

3

R5-

$P^*(\vec{F}_{ext}) = P^*(\vec{P}) + P^*(\vec{R}_I)$ avec $P^*(\vec{R}_I) = 0$ (liaison sans frottement)

1pt

$P^*(\vec{P}) = -mg\vec{z}_0.\vec{V}^*(G) = -mg\vec{z}_0.(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0) = -mga\dot{\theta}\cos\theta = Q_\theta\dot{\theta} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(-mga\sin\theta)$

D'où : $\boxed{Q_\theta = -mga\cos\theta}$ $Q_x = Q_y = Q_\psi = Q_\varphi = 0$ et $\boxed{U(\theta) = -mga\sin\theta}$ 1pt

1

R6-

$$\vec{V}_g(I, S/R_0) = \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI}$$

$$\vec{V}(G \in S/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{z}_0 \quad et \quad \overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$$

D'où :

1,5 $$\boxed{\vec{V}(I \in S/R_0) = [\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)]\vec{u} + [-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta]\vec{v}}$$

R7-

La condition de roulement sans glissement s'écrit : $\vec{V}_g(I, S/R_0) = \vec{0}$

D'où :

0,5 $$\boxed{\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 & (1)' \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta = 0 & (2)' \end{cases}}$$

R8-

1 $$\boxed{\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi = -a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) & (1)' \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = -a\dot{\theta}\sin\theta & (2)' \end{cases}} \quad (Lc)$$

$(1)'^2 + (2)'^2 \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + a^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2}$

R9- *L'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit :* $T + V = T - U = Cte = E$

Soit :

1 $$m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) + ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + 2mga\sin\theta = 2E$$

En remplaçant $m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ par $ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$... de la relation (1), on obtient :

$$2ma^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta = -2mga\sin\theta + 2E$$

Ou encore $\boxed{2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\sin^2\theta = \frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\sin\theta}$ 1

R10- *Les équations (Lc) sont :*

$$\begin{cases} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = 0 & (1)' \times \lambda_1 \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta}\sin\theta = 0 & (2)' \times \lambda_2 \end{cases}$$

D'où les équations de Lagrange avec multiplicateurs :

$L_x : m\ddot{x} = \lambda_1 \cos\psi - \lambda_2 \sin\psi$ 1

$L_y : m\ddot{y} = \lambda_1 \sin\psi + \lambda_2 \cos\psi$ 1

$L_\psi : \frac{d}{dt}\left[\frac{ma^2}{2}\sin^2\theta\dot{\psi} + ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right] = \lambda_1 a\cos\theta$ 1

$L_\varphi : \frac{d}{dt}\left[ma^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right] = \lambda_1 a$ 1

$L_\theta : \frac{d}{dt}\left[\frac{ma^2}{2}\dot{\theta} + ma^2\cos^2\theta\dot{\theta}\right] - \frac{ma^2}{2}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + ma^2\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) + ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$

$= \lambda_2 a\sin\theta - mga\cos\theta$ 1

R11-

L'élimination de λ_1 entre les 2 équations L_ψ et L_φ donne :

$$\cos\theta\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\dot{\psi} + (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right]$$

$$\underline{\cos\theta\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right]} = \frac{1}{2}\sin^2\theta\ddot{\psi} + \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\psi} + \underline{\cos\theta\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right]} - (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\sin\theta\dot{\theta}$$

Soit : $\frac{1}{2}\sin^2\theta\ddot{\psi} - \sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$ (solution exclue car le cerceau est posé sur le plan)

1 Ou $\boxed{\frac{1}{2}\ddot{\psi}\sin\theta = \dot{\theta}\dot{\varphi}}$, c'est la relation (3) demandée.

La dérivation par rapport au temps de l'équation (1)' donne :

$$a\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right] = -\ddot{x}\cos\psi - \ddot{y}\sin\psi + \dot{x}\dot{\psi}\sin\psi - \dot{y}\dot{\psi}\cos\psi$$

la relation (2)' $\Rightarrow$ $\dot{x}\sin\psi - \dot{y}\cos\psi = a\sin\theta\dot{\theta}$, soit en remplaçant dans l'équation ci-dessus :

$$a\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right] = -\ddot{x}\cos\psi - \ddot{y}\sin\psi + a\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta$$

D'autre part, L_x et L_y donnent $\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = \frac{\lambda_1}{m}$

Et L_φ donne : $\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi = a\frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\right]$

Finalement on obtient :

1 $2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta = 0$ (4)

R11- (R12)

1 $\theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$; (3) $\Rightarrow \ddot{\psi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = \dot{\psi}_0}$

(4) $\Rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0}$

Conclusion

Les mouvements pour lesquels le cerceau garde une inclinaison constante $\theta = \theta_0$ *sont tels que :*

$\boxed{\dot{\psi} = \dot{\psi}_0}$ et $\boxed{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0}$ càd les mouvements pour lesquels le cerceau a une vitesse de précession constante et une vitesse de rotation propre constante.

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session de rattrapage - Mars 2015
SMP5
Durée : 1h 30'

Sujet thématique proposé : étude d'un mécanisme pendulaire
Mise en œuvre par les formalismes lagrangien et hamiltonien

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

Le système étudié est composé d'une barre (AB) de masse m, de longueur 2a et de deux charnières de masses négligeables. Les deux extrémités A et B de la barre peuvent glisser, sans frottement, sur les axes $(O,\vec{x})$ *et* $(O,\vec{y})$ *grâce à ces deux charnières. Le centre d'inertie G de la barre est lié au point fixe C de l'axe* $(O,\vec{y})$ *par un ressort élastique de raideur k et de longueur initiale* l_o $(l_o > a)$*. Au cours du mouvement le ressort demeure horizontal et parallèle à l'axe* $(O,\vec{x})$ *(voir figure). La configuration du système est complètement déterminée par l'angle* θ *que fait la barre (AB) avec l'axe des abscisses. On notera* $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

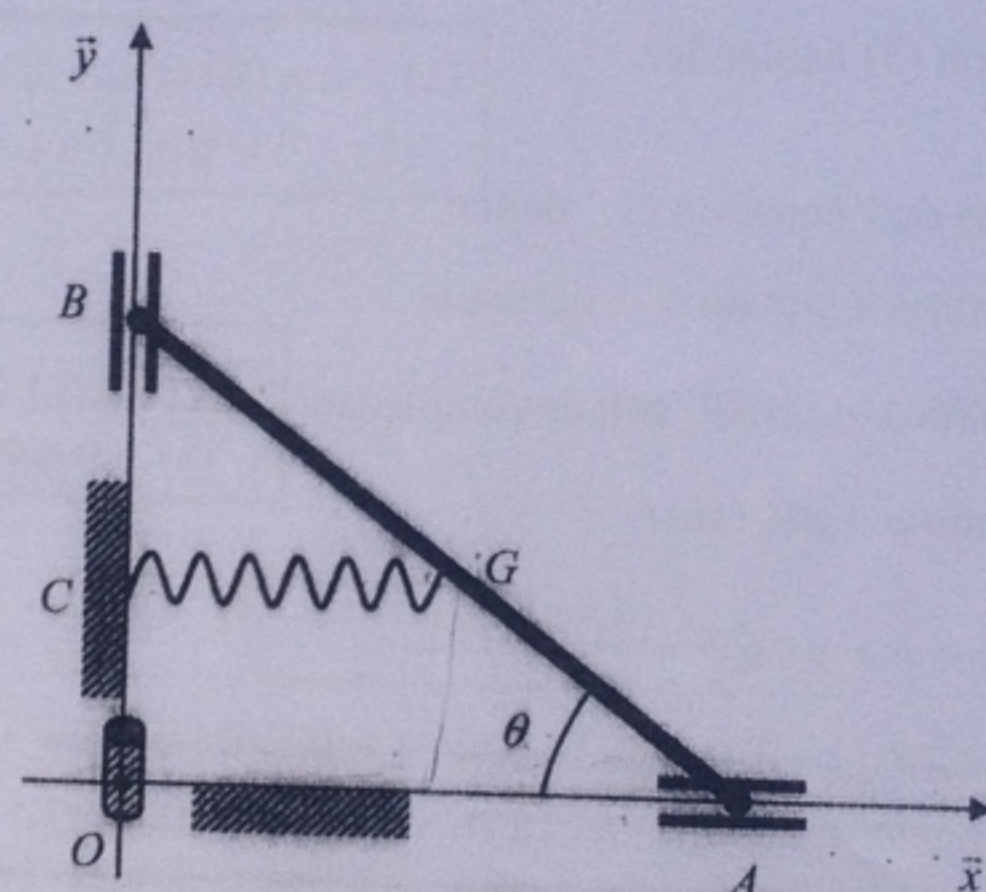


Figure : description générale du système

Q1- *Caractériser mécaniquement le système.*
Q2- *Exprimer les coordonnées* (x, y) *du centre d'inertie G de la barre AB en fonction de* θ.
Q3- *Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.*
Q4- *Établir son énergie potentielle.*
Q5- *En déduire son Lagrangien.*
Q6- *Déterminer l'équation d'Euler – Lagrange du mouvement. On notera* (L_θ) *cette équation.*
Q7- *Après avoir justifié son existence, écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique.*
Q8- *Montrer que cette intégrale se ramène à une équation du type* $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.
Q9- *A quoi servirait une telle équation ?*

7

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

Q10- *Calculer l'impulsion généralisée p_θ.*
Q11- *En utilisant la transformée de Legendre, déterminer le Hamiltonien H du système.*
Q12- *H représente-t-il l'énergie totale du système ? Justifier votre réponse.*
Q13- *Déterminer les équations canoniques du mouvement.*
Q14- *En déduire l'équation du mouvement (L_θ) déterminée à la question 6 de la partie A. Conclure.*

PARTIE C – LINEARISATION ET RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

Dans cette partie on suppose que $\theta << 1$.

Q15- *Linéariser (L_θ) et montrer qu'elle se ramène à une équation du type :*

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = C \quad (E)$$

où Ω et C sont des constantes à préciser.

Q16- *Quel est le sens physique de la grandeur Ω ?*
Q17- *Résoudre l'équation (E) et donner l'expression de $\theta(t)$. On notera A et B les deux constantes d'intégration.*

Question bonus (*)
Après ce long travail d'analyse, Faites une synthèse, très succincte, en guise de conclusion à ce sujet thématique.

> ☛ *On rappelle que le Hamiltonien H d'un système mécanique n'est autre que la transformée de Legendre du Lagrangien L en $\dot{q}$:*
>
> $$H = \mathcal{L}(L) = p_i\dot{q}_i - L$$
> $$\dot{q} \rightarrow p$$

(*) *Question subsidiaire de 1 point qui sera rajouté, en plus, à la note obtenue.*

Examen de mécanique analytique et vibrations
Session de rattrapage - Mars 2015
SMP5

Solution détaillée

PARTIE A – ETUDE PAR LE FORMALISME LAGRANGIEN

R1- *Le système est conservatif et holonome et il a 1 seul degré de liberté.* /1 pt

R2- $\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V}(G/R) = \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$
1pt

R3- $T(AB/R) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}^2$

avec $I_{Gz} = \int_{P\in(AB)} r^2 dm = \lambda \int_{-a}^{a} r^2 dr = \lambda \left[\frac{r^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{m}{2a} \times 2 \times \frac{a^3}{3} = \frac{ma^2}{3}$

D'où :

$$\boxed{T(AB/R) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2}$$ 2 pts

R4-

$V = Vpes + Vél$ avec $V_{pes} = mgy = mga\sin\theta$ et $V_{él} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ où $l = a\cos\theta$

D'où :

$$\boxed{V = mga\sin\theta + \frac{1}{2}k(a\cos\theta - l_0)^2}$$ 2 pts

R5-

$$\boxed{L = T - V = \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\sin\theta - \frac{1}{2}k(a\cos\theta - l_0)^2}$$ 0,5 pt

R6-

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mga\cos\theta + k(a\cos\theta - l_0)a\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} + ga\cos\theta - \omega_0^2(a\cos\theta - l_0)a\sin\theta = 0} \quad (L_\theta)$$ 1,5

R7-

L'intégrale première de l'énergie cinétique existe car le système est conservatif, d'où :
0,5

$T + V = K = Cte$ soit :

9

$$\boxed{T+V=\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2=K}$$ 0,5 pt

R8-

$$\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2=K-mga\sin\theta-\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

D'où :

$$\boxed{\dot{\theta}^2=\frac{3}{2a^2}\left[\frac{K}{m}-ga\sin\theta-\frac{1}{2}\omega_0^2(a\cos\theta-l_0)^2\right]=f(\theta)}$$ 1 pt

R9-

Cette équation sert à remplacer l'équation (L_θ). 0,5 pt

PARTIE B – ETUDE PAR LE FORMALISME HAMILTONIEN

R10-

1 pt $\boxed{P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{3P_\theta}{4ma^2}$

R11-

$$H=P_\theta\dot{\theta}-L=P_\theta\dot{\theta}-\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

$$=P_\theta\times\frac{3P_\theta}{4ma^2}-\frac{2}{3}ma^2\times\left(\frac{3P_\theta}{4ma^2}\right)^2+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2$$

D'où :

$$\boxed{H=\frac{3P_\theta^2}{8ma^2}+mga\sin\theta+\frac{1}{2}k(a\cos\theta-l_0)^2}$$ 2 pts

R12-

Oui H représente l'énergie totale du système car $\frac{\partial H}{\partial t}=0.$ 0,5 pt

R13-

1 pt $\boxed{\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial P_\theta}=\frac{3P_\theta}{4ma^2}}$ (1) $\boxed{\dot{P}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-mga\cos\theta+k(a\cos\theta-l_0)\sin\theta}$ (2)

a

1 pt

R14-

(1) $\Rightarrow P_\theta=\frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}$

(2) $\Rightarrow\dot{P}_\theta=\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}=-mga\cos\theta+k(a\cos\theta-l_0)\sin\theta$

a

D'où :

$$\boxed{\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta}+ga\cos\theta-\omega_0^2(a\cos\theta-l_0)a\sin\theta=0}\quad(L_\theta)$$ 1 pt

10

PARTIE C – LINEARISATION ET RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT

$\boxed{R15\text{-}}$

$\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ *et* $\cos\theta \approx 1.$

$(L_\theta) \Rightarrow \frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} + ga - \omega_0^2(a - l_0)a\theta = 0$ *soit :* $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\omega_0^2}{4a}(l_0 - a)\theta = -\frac{3g}{4a}}$ 1 pt

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = C} \quad (E) \quad avec \ \Omega^2 = \frac{3\omega_0^2}{4a}(l_0 - a) \ et \ C = -\frac{3g}{4a}$$

$\boxed{R16\text{-}}$

Ω représente la pulsation liée aux oscillations de la tige (AB). 0,25 pt

$\boxed{R17\text{-}}$

$\boxed{\theta = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + D}$ *avec* $\boxed{D = -\frac{g}{\omega_0^2(l_0 - a)}}$

1,5

Question bonus (*)

La conclusion qui s'impose est que les formalismes lagrangien et hamiltonien conduisent à la même équation du mouvement.

1pt

11