

# **MA1 – COURS DE CHARPENTES METALLIQUES**

---

## **ANALYSE DES STRUCTURES EN ACIER (1)**

---

**INSTITUT HEMES GRAMME**

**Ir. Jacques Dehard  
Professeur**

# 1. L'EUROCODE 3

Les présentes notes sont basées sur l'Eurocode 3 (ou EC3, ou EN 1993) : « Calcul des structures en acier », et plus particulièrement sur l'EN 1993-1-1 « Règles générales et règles pour les bâtiments » ainsi que l'annexe nationale belge s'y rapportant.

## 1.1 Domaine d'application de l'Eurocode 3

L'Eurocode 3 s'applique au calcul des bâtiments et des ouvrages de génie civil en acier. Il est conforme aux principes et exigences concernant la sécurité et l'aptitude au service des structures, les bases de leur calcul et leur vérification qui sont donnés dans l'EN 1990 (EC0) : « Bases de calcul des structures ».

L'Eurocode 3 concerne uniquement les exigences de résistance, d'aptitude au service, de durabilité et de résistance au feu des structures en acier. Les autres exigences, telles l'isolation thermique ou phonique, ne sont pas considérées. Il est destiné à être utilisé en conjonction avec les documents suivants : l'EN 1990 « Bases de calcul des structures », l'EN 1991 « Actions sur les structures », les normes et guides sur les produits de construction en acier, et l'EN 1090 « Exécution des structures en acier - Exigences techniques ».

L'Eurocode 3 est subdivisé en différentes parties :

- EN 1993-1 Calcul des structures en acier : Règles générales et règles pour les bâtiments ;
- EN 1993-2 Calcul des structures en acier : Ponts métalliques ;
- EN 1993-3 Calcul des structures en acier : Pylônes, mâts et cheminées ;
- EN 1993-4 Calcul des structures en acier : Silos, réservoirs et canalisations ;
- EN 1993-5 Calcul des structures en acier : Pieux et palplanches ;
- EN 1993-6 Calcul des structures en acier : Chemins de roulement ;

Les EN 1993-2 à EN 1993-6 font référence aux règles génériques de l'EN 1993-1 et les complètent.

L'EN 1993-1 « Règles générales et règles pour les bâtiments » comprend :

- EN 1993-1-1 Calcul des structures en acier : Règles générales et règles pour les bâtiments ;
- EN 1993-1-2 Calcul des structures en acier : Calcul du comportement au feu ;
- EN 1993-1-3 Calcul des structures en acier : Profilés et plaques à parois minces formés à froid ;
- EN 1993-1-4 Calcul des structures en acier : Aciers inoxydables ;
- EN 1993-1-5 Calcul des structures en acier : Plaques planes chargées dans leur plan ;
- EN 1993-1-6 Calcul des structures en acier : Coques ;
- EN 1993-1-7 Calcul des structures en acier : Plaques planes chargées transversalement à leur plan ;
- EN 1993-1-8 Calcul des structures en acier : Calcul des assemblages ;
- EN 1993-1-9 Calcul des structures en acier : Fatigue ;
- EN 1993-1-10 Calcul des structures en acier : Choix des qualités d'acier vis-à-vis de la ténacité et des propriétés dans le sens de l'épaisseur ;
- EN 1993-1-11 Calcul des structures en acier : Calcul des structures à câbles ou éléments tendus.

## 1.2 Domaine d'application de la Partie 1-1 de l'Eurocode 3

L'EN 1993-1-1 donne des règles de calcul fondamentales pour les structures en acier avec des épaisseurs de matériau  $t \geq 3$  mm. Elle énonce également des spécifications supplémentaires pour le calcul structural des bâtiments en acier. Pour les éléments minces formés à froid et les épaisseurs de plaque  $t < 3$  mm, il faut se référer à l'EN 1993-1-3.

L'EN 1993-1-1 est subdivisée en 7 chapitres :

Chapitre 1: Généralités ; Chapitre 2: Bases de calcul ; Chapitre 3: Matériaux ; Chapitre 4: Durabilité ; Chapitre 5: Analyse structurale ; Chapitre 6: Etats limites ultimes ; Chapitre 7: Etats limites de service.

## 1.3 Références normatives

Les Normes de référence générales sont les :

- EN 1090 Exécution des structures en acier - Exigences techniques ;
- EN ISO 12944 Anticorrosion des structures en acier par systèmes de peinture ;
- EN 1461 Revêtements par galvanisation à chaud sur produits finis ferreux ;
- EN 10025-1 à 6 Normes de référence pour l'acier de construction soudable ;
- EN 10164 Aciers de construction à caractéristiques de déformation améliorées dans le sens perpendiculaire à la surface du produit - Conditions techniques de livraison ;
- EN 10210-1:2002 Profils creux finis à chaud - Partie 1: Conditions techniques de livraison ;
- EN 10219-1:2002 Profils creux formés à froid - Partie 1: Conditions techniques de livraison.

## 1.4 Conventions pour les axes des barres

Les conventions d'appellation pour les axes des barres en acier de sections en double té et tubulaires sont les suivantes:

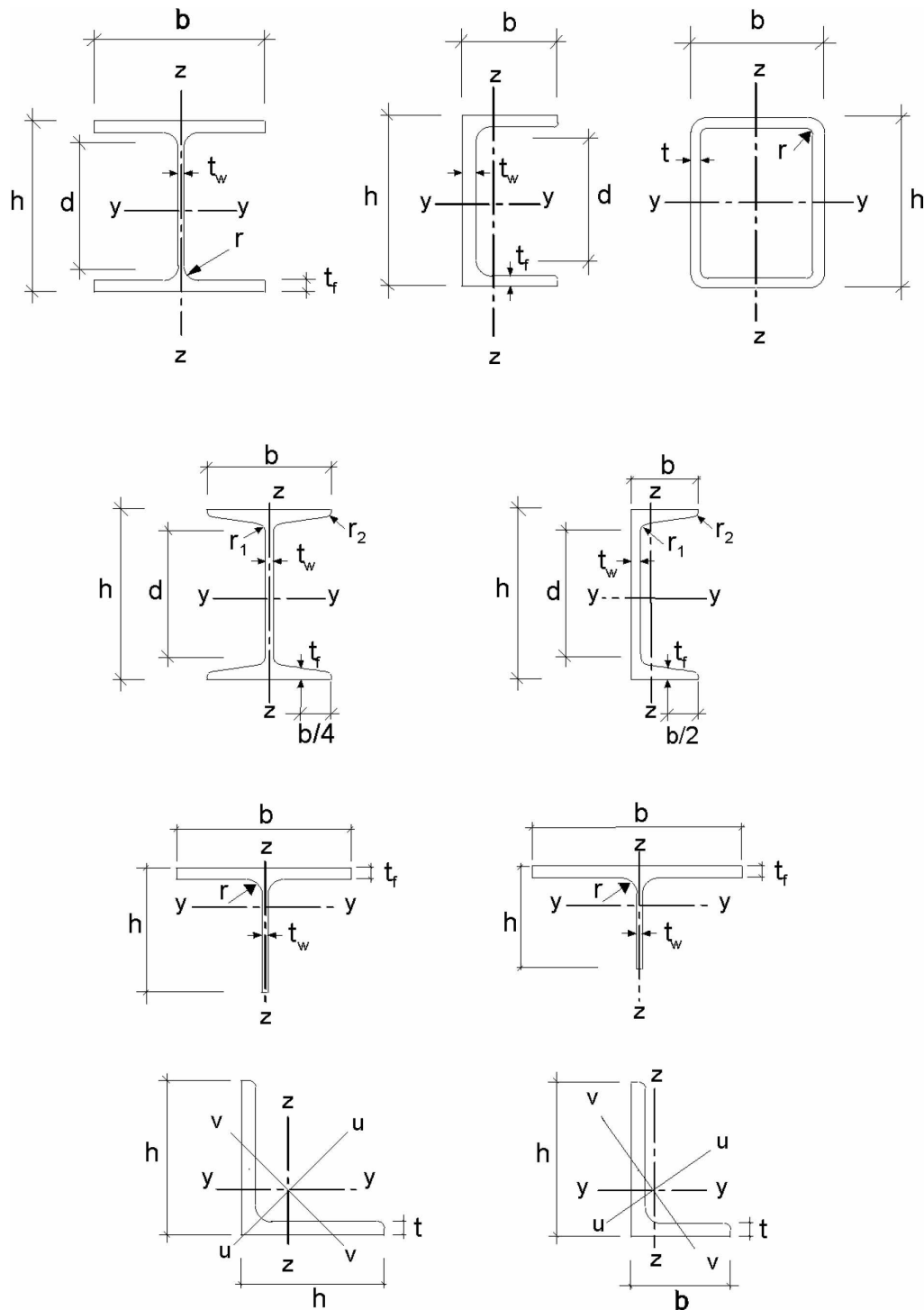
« x-x » pour l'axe longitudinal de la barre, « y-y » pour l'axe de la section transversale parallèle aux semelles, et « z-z » pour l'axe de la section transversale perpendiculaire aux semelles.

Pour les cornières, y-y est l'axe parallèle à l'aile la plus petite et z-z est l'axe perpendiculaire à l'aile la plus petite. Quand cela s'avère nécessaire, u-u est l'axe principal de forte inertie (lorsqu'il ne coïncide pas avec l'axe yy) et v-v est l'axe principal de faible inertie (lorsqu'il ne coïncide pas avec l'axe zz).

En ce qui concerne les « indices » des M.N.V., pour les moments on utilisera le nom de l'axe autour duquel le moment agit, et pour les autres efforts internes, l'axe dans la direction duquel l'effort agit.

Toutes les règles données dans l'Eurocode 3 se rapportent aux propriétés des axes principaux, définis en général par les axes y-y et z-z ou, pour des sections telles que des cornières, par les axes u-u et v-v.

Les symboles utilisés pour les dimensions et les axes de section transversale des profilés laminés en acier sont indiqués ci-dessous :



## 2. Bases de calculs de l'EC3

### 2.1 Principes de calcul

La vérification de la résistance des sections transversales et des barres doit être conforme aux principes du calcul aux états limites utilisé conjointement avec la méthode des coefficients partiels et les combinaisons de charges, tel que défini dans l'EN 1990 ou EC0. Les actions à prendre en compte sont données dans l'EN 1991 ou EC1.

Pour les bâtiments, le coefficient partiel de sécurité « global »  $\gamma_M$  à appliquer aux diverses valeurs caractéristiques des résistances est le suivant :

- pour le contrôle de la résistance des sections transversales (quelle que soit la classe de section) :  $\gamma_{M0} = 1,00$  ;
- pour le contrôle de la résistance des barres aux instabilités :  $\gamma_{M1} = 1,00$  ;
- pour le contrôle de la résistance à la rupture des sections transversales en traction :  $\gamma_{M2} = 1,25$  ;
- pour le contrôle de la résistance des organes d'assemblages (boulons, soudures, ...) :  $\gamma_{Mb} = 1,25$ .

(voir les EN 1993 Parties 2 à 6 pour d'autres valeurs numériques recommandées).

Les matériaux utilisés doivent être conformes aux indications de la première partie de ces notes sur les « aciers de structure ».

En ce qui concerne la durabilité des structures, il y a lieu de concevoir les parties susceptibles de subir la corrosion, l'usure mécanique ou la fatigue de telle sorte que l'inspection, la maintenance et la reconstruction puissent être effectuées de manière satisfaisante en considérant la durée de vie de calcul et l'accessibilité à l'inspection et à la maintenance en service.

Pour les structures de bâtiments, aucune vérification de la fatigue n'est normalement exigée, sauf pour les éléments suivants:

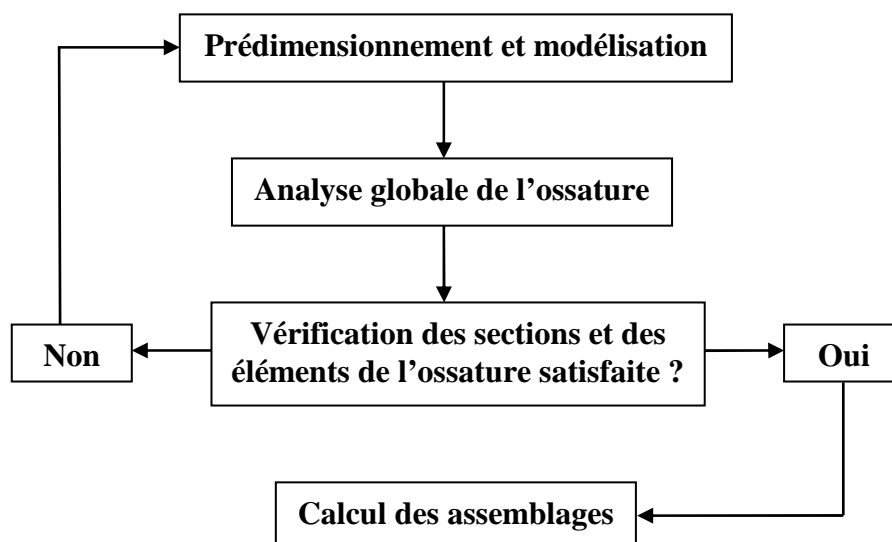
- Eléments supportant des dispositifs de levage ou des charges roulantes ;
- Eléments soumis à des cycles de contraintes répétés provoqués par des machines vibrantes ;
- Eléments soumis à des vibrations induites par le vent ;
- Eléments soumis à des oscillations induites par la foule ;

Pour les éléments ne pouvant être inspectés, il convient de prendre en compte les effets éventuels de la corrosion de manière appropriée.

L'application d'une protection anticorrosion n'est pas nécessaire pour les structures internes de bâtiments, si le taux d'humidité relative interne n'excède pas 80%.

### 2.2 Analyse des structures

Le dimensionnement d'une structure en acier comporte les étapes suivantes :



L'analyse globale a pour objectif de déterminer, à l'état limite considéré, les déformations et la distribution des sollicitations dans une structure soumise à un ensemble particulier d'actions de calcul, et en particulier, les efforts maximum qui vont survenir dans les sections, les éléments et les assemblages de la structure.

Cette analyse doit prendre en compte les effets de second ordre, les imperfections structurelles, le comportement des assemblages et la redistribution plastique des efforts lorsque c'est nécessaire (analyse globale plastique).

Plus l'analyse globale est fouillée pour approcher la réalité au plus près, plus la vérification des éléments de la structure sera simplifiée : le choix de cet analyse n'est donc pas neutre comme on le verra par la suite.

Les ossatures doivent être vérifiées en ce qui concerne :

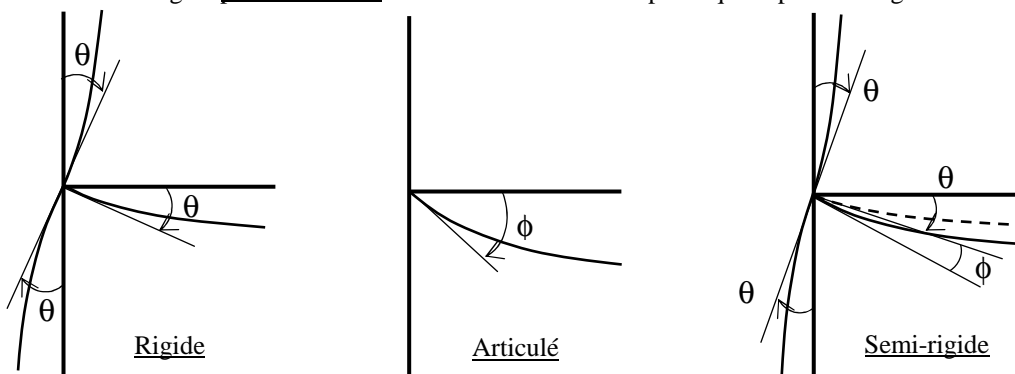
- les déformations, par le calcul des flèches verticales des éléments de planchers et flèches horizontales des ossatures dans les combinaisons les plus défavorables de **l'état limite de service**. Ces valeurs, précieuses en tant qu'indicateurs de la rigidité d'un élément ou d'une structure (l'inconfort des occupants, dommages locaux) doivent toujours correspondre au domaine élastique du comportement de la structure quelles que soient les méthodes adoptées pour évaluer la résistance et la stabilité. Dans les bâtiments, ces flèches doivent être inférieures ou égales à des valeurs maximales spécifiées dans la NBN B-03-003. Lors de la détermination de la flèche, il peut s'avérer nécessaire d'étudier les effets d'une contre-flèche préalable, des charges permanentes et des charges variables séparément ;
- les vibrations, en vérifiant les fréquences propres de la structure (ou partie de structure) ;
- les résistances des sections transversales, des éléments (flambement, déversement) et des assemblages, la stabilité globale (flambement d'ensemble) et l'équilibre statique (renversement, glissement) de la structure, et ce, dans les combinaisons correspondantes les plus défavorables de **l'état limite ultime**.

## 2.3 Modélisation des assemblages

L'approche traditionnelle du calcul des structures de bâtiments consiste à modéliser les assemblages entre éléments, et notamment les assemblages « poutre-colonne », vis-à-vis de la transmission de moments de flexion, comme des **nœuds articulés** ou **rigides**. Les nœuds articulés sont supposés être des articulations parfaites et ne transmettent donc aucun moment, tandis que les nœuds rigides sont supposés assurer une continuité totale entre les barres qu'ils relient.

Le comportement en rotation des assemblages réels est, en fait, intermédiaire entre les deux situations extrêmes décrites ci-avant. Aussi, pour ne pas imposer un raidissage excessif et coûteux d'assemblages qui ne seraient pas assez rigides, ou pour profiter avantageusement d'assemblages qui ne seraient pas tout à fait des articulations, a été conçue la catégorie **d'assemblages « semi-rigides » ou « semi-continus »**.

Illustration d'un assemblage « poutre-colonne » dont les rotations sont provoquées par le chargement de la poutre :

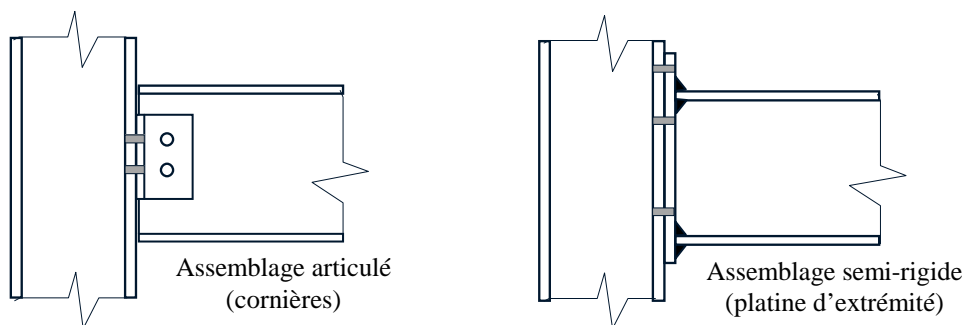


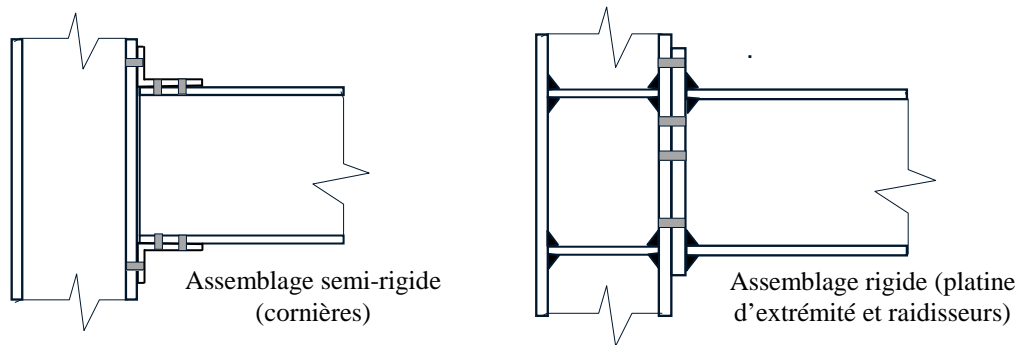
Lorsque toutes les différentes parties constituant l'assemblage sont suffisamment rigides, il n'existe presque aucune différence entre les rotations respectives des extrémités des éléments assemblés : l'assemblage peut être considéré comme **rigide**. Un assemblage rigide subit donc une rotation unique, globale en bloc rigide, qui est la rotation nodale des méthodes d'analyse courante utilisées pour les ossatures « continues ».

Dans le cas où l'assemblage possède une rigidité de flexion très faible, la poutre se comporte alors de façon très semblable à une poutre articulée en ce point, quel que soit le comportement du ou des autre(s) élément(s) assemblé(s) : l'assemblage peut être considéré comme **articulé**. Dans un assemblage articulé, la rotation relative entre la poutre et la colonne est presque la même que celle de l'extrémité d'une poutre simplement appuyée.

Pour les cas intermédiaires (rigidité d'assemblage finie non nulle), le moment transmis entraîne une différence entre les rotations absolues des deux éléments assemblés : il existe une rotation relative  $\Phi$  et l'assemblage est alors appelé « **semi-rigide** » ou « **semi-continu** ». Les ossatures disposant de ce type d'assemblages sont dites « semi-continues ».

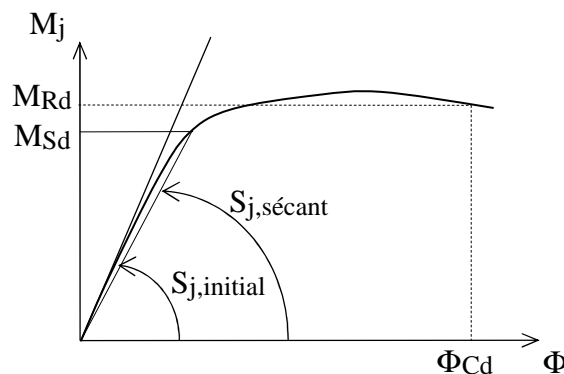
Exemples d'assemblages des différentes catégories précitées :





L'allure de la courbe de comportement « moment-rotation » d'un assemblage semi-rigide fait apparaître un comportement linéaire au départ, représenté par une loi linéaire-élastique  $M_j = S_j \cdot \Phi_j$ , où  $S_j$  est la rigidité de rotation de cet assemblage, paramètre qui relie le moment transmis  $M_j$  et la rotation relative  $\Phi_j$ , qui est la différence entre les rotations absolues des deux éléments assemblés. Plus grande est la rigidité de l'assemblage par rapport à celle de l'élément assemblé, plus rigide est l'assemblage. Cette courbe de comportement fait aussi apparaître les trois caractéristiques fondamentales suivantes :

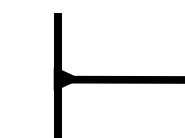
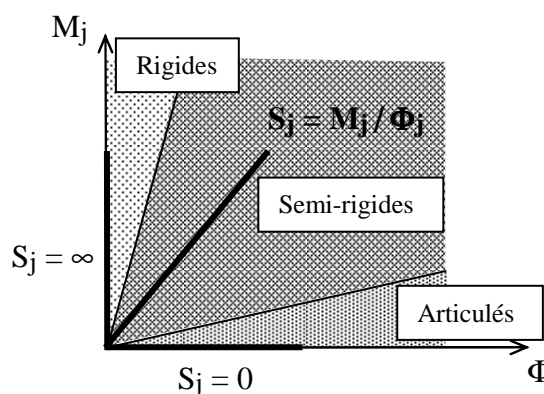
- la rigidité initiale ( $S_{j,i}$ ) ou la rigidité sécante ( $S_{j,s}$ ) pour un moment transmis donné, soit  $M_{Sd}$  ;
- un moment résistant de calcul  $M_{Rd}$  ;
- une capacité de rotation ( $\Phi_{Cd}$ ) au-delà de laquelle le moment résistant de calcul  $M_{Rd}$  n'est plus maintenu.



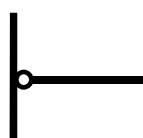
Le moyen le plus simple de représenter l'assemblage semi-rigide dans l'analyse globale, est d'utiliser un ressort de rotation équivalent, situé entre les extrémités des deux éléments assemblés. Pour l'assemblage poutre-colonne représenté ci-avant, le ressort est placé au niveau de l'extrémité de la poutre.

A partir de là, il est possible d'établir un classement des assemblages :

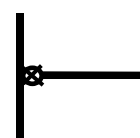
- sur base de la rigidité : en définissant trois zones sur le diagramme «  $M-\Phi$  », l'une proche de l'axe des « moments » qui représente un assemblage parfaitement rigide, l'autre proche de l'axe des « rotations » qui représente une articulation parfaite, et une large zone intermédiaire, domaine des assemblages semi-rigides ;



**Assemblage rigide**  
( $\Phi_j = 0, M_j \neq 0$ )



**Assemblage articulé**  
( $\Phi_j \neq 0, M_j = 0$ )



**Assemblage semi-rigide**  
( $\Phi_j \neq 0, M_j \neq 0$ )

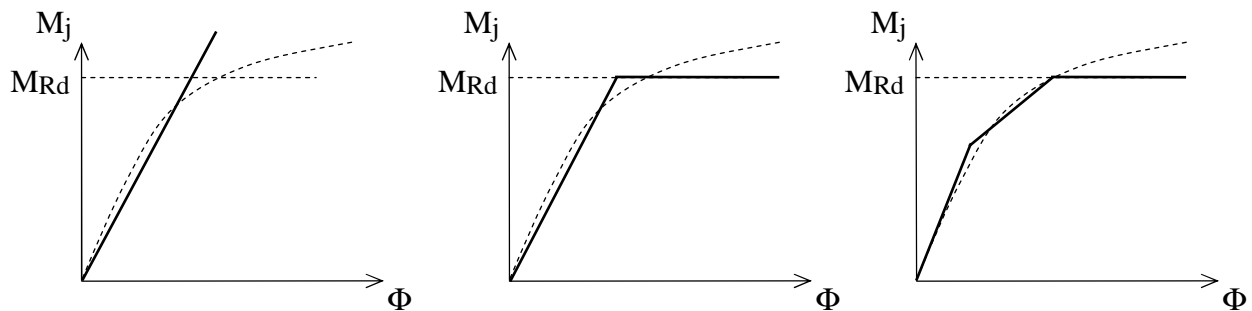
- sur base de la **résistance** : les assemblages sont classifiés comme étant "à pleine résistance" s'ils présentent un moment résistant de calcul  $M_{Rd}$  supérieur ou égal à celui de l'élément assemblé possédant la résistance la plus faible. Ils sont dits "à résistance partielle" si leur résistance est inférieure à celle de l'élément assemblé possédant la résistance la plus faible. Si l'assemblage est un assemblage bout-à-bout dans une poutre, la comparaison est effectuée avec le moment résistant de la poutre. Lorsqu'on utilise des assemblages à pleine résistance, on peut généralement supposer qu'aucune rotule plastique ne s'y forme. Cependant, pour s'en assurer, il est exigé d'utiliser un assemblage possédant une marge supplémentaire de résistance de 20%. Par contre, des rotules plastiques peuvent apparaître dans les assemblages à résistance partielle. Lorsqu'une rotule plastique se forme dans un tel assemblage, celui-ci doit être ductile afin d'avoir une capacité de rotation suffisante pour permettre une augmentation des charges, l'assemblage agissant comme une rotule une fois sa résistance plastique atteinte.

Le choix du modèle d'assemblage en vue du calcul d'une structure aura une influence sur sa modélisation. Il doit, en effet, y avoir une cohérence entre la modélisation de l'ossature et le comportement des assemblages. Ainsi, aux trois modélisations possibles en structures réticulée, continue et semi-continue doivent correspondre, respectivement, des modèles d'assemblages articulés, rigides et semi-rigides.

Les assemblages représentés comme rigides ou articulés dans l'analyse doivent être calculés de sorte à satisfaire à la classification basée sur la rigidité.

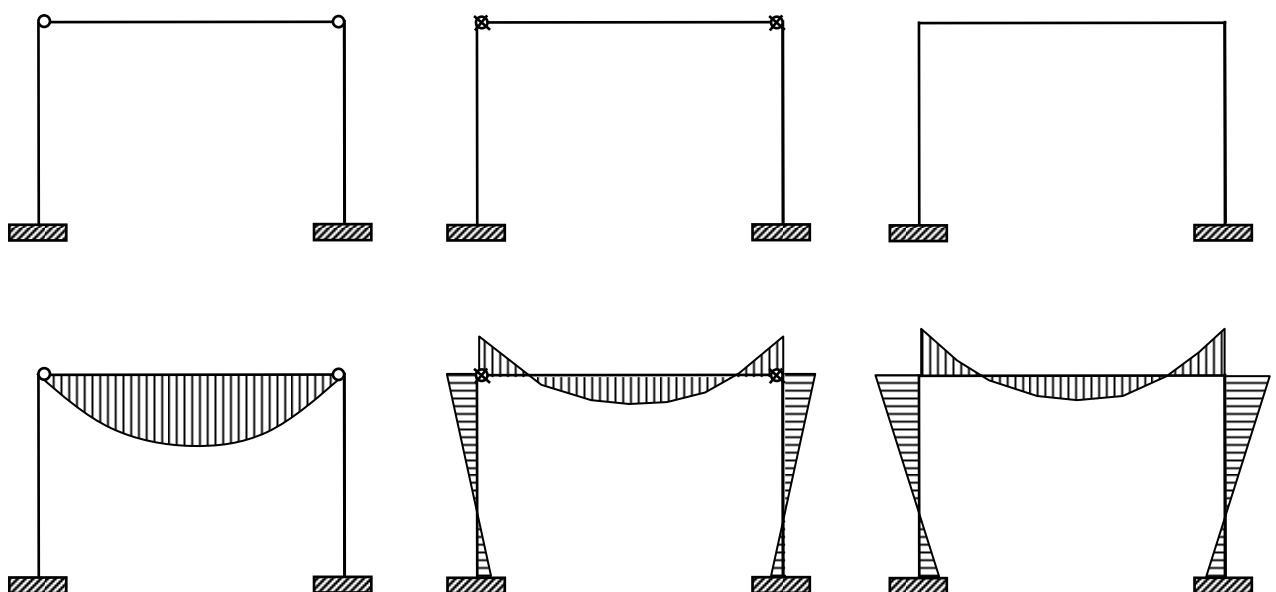
Le modèle semi-rigide peut être représenté par un ressort en rotation plus ou moins sophistiqué.

Dans une ossature comportant des assemblages semi-rigides, la mise en charge entraîne, à la fois, un moment fléchissant  $M_j$  et une rotation relative  $\Phi_j$  entre les éléments assemblés. Le moment et la rotation relative sont liés par une loi constitutive qui, idéalisée, peut aller du type « linéaire élastique » au type « élastique-parfaitement plastique, bi ou tri linéaire ».



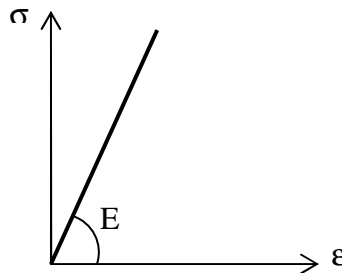
Signalons enfin, que l'effet, à l'étape de l'analyse globale, d'avoir des assemblages semi-rigides au lieu d'assemblages rigides ou articulés, est de modifier non seulement les déplacements mais aussi la répartition et l'amplitude des efforts dans la structure.

Exemple : portique dont la traverse est soumise à une charge verticale uniformément répartie, diagrammes des M dans l'hypothèse d'un calcul élastique.



## 2.4 Analyse globale élastique

L'analyse globale élastique suppose un comportement élastique de la structure et, en conséquence, du matériau constitutif lui-même. Elle est fondée sur l'hypothèse que le comportement contrainte-déformation du matériau est linéaire, quel que soit le niveau de contrainte. La déformation est alors supposée proportionnelle à la contrainte, c'est-à-dire que le matériau obéit à la loi de Hooke sur toute l'étendue du chargement :



Evidemment, les propriétés réelles du matériau, notamment la limite élastique et la résistance effective, seront prises en compte dans la vérification des sections transversales et des éléments.

Comme on le sait, dans l'analyse globale élastique des structures isostatiques, les efforts intérieurs sont obtenus à partir des seules équations de l'équilibre statique. Dans les structures hyperstatiques, les sollicitations internes doivent satisfaire les conditions d'équilibre et produire des déformations compatibles avec la continuité élastique de la structure et avec les conditions d'appuis. Les équations d'équilibre ne sont pas suffisantes pour déterminer les forces inconnues et elles doivent être complétées par des considérations géométriques entre certaines déformations de la structure. Ces relations sont appelées conditions de compatibilité car elles assurent la compatibilité des déformations dans la géométrie de la structure déformée. Deux méthodes générales de calcul peuvent être utilisées pour calculer les efforts internes et les réactions d'appuis dans les structures hyperstatiques : la méthode des forces et la méthode des déplacements.

Dans l'analyse globale élastique, les types d'assemblages utilisés peuvent être les assemblages articulés, rigides (continuité parfaite) ou semi-rigides, mais dans ce dernier cas, ils doivent alors être modélisés par des ressorts élastiques linéaires !

Lorsque la théorie du premier ordre est utilisée, les sollicitations sont déterminées en utilisant la configuration initiale (non déformée) de la structure.

Lorsque la déformation géométrique de la structure augmente sensiblement les effets des actions (effets du second ordre), il faut utiliser la théorie du second ordre (non-linéarité géométrique), qui fait appel à des procédures itératives pour prendre en compte l'influence de la déformation de la structure. Le principe de superposition ne pouvant pas être appliqué dans ce cas, l'analyse doit être menée en référence à une distribution des charges donnée. Il faut signaler que l'Eurocode 3, comme la plupart des codes et règlements, autorise que les efforts internes, dans les structures à comportement géométrique non linéaire régulier, soient obtenus par une analyse élastique linéaire et soient amplifiés pour prendre en compte l'effet complémentaire du déplacement des charges.

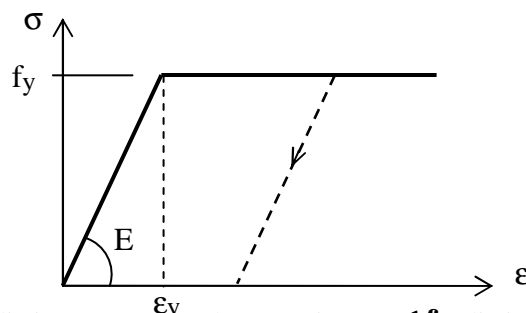
Les sollicitations dans une structure peuvent être calculées à l'aide d'une analyse globale élastique (au premier ou au second ordre) même lorsque la résistance des sections transversales est basée sur leur résistance plastique.

L'analyse globale élastique peut aussi être utilisée dans le cas de sections transversales dont la résistance est limitée par le voilement local.

## 2.5 Analyse globale plastique

### 2.5.1 Moment plastique

Le comportement mécanique de l'acier n'est, en réalité, pas infiniment linéaire. La relation contrainte-déformation idéalisée d'un acier « élastique - parfaitement plastique », est représentée sur la figure ci-dessous :



La droite de Hooke est donc limitée aux v  $\epsilon_y$  des contraintes  $\sigma \leq f_y$ , limite élastique du matériau.

Au-delà de cette valeur, le matériau s'écoule plastiquement à contrainte constante  $\sigma = f_y$ .

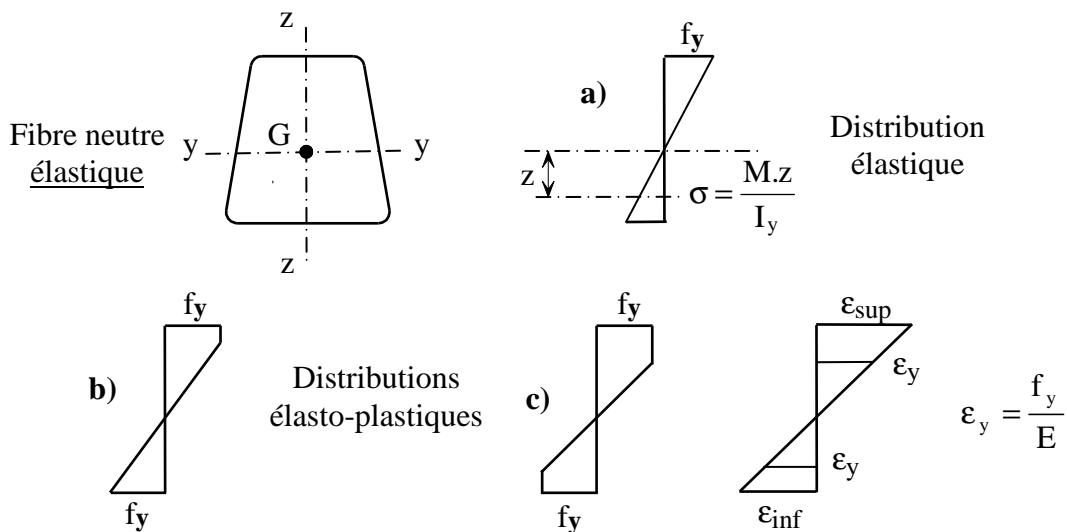


Si la contrainte diminue en un point quelconque du domaine plastique, le chemin de retour est une droite parallèle à la loi de Hooke dont la pente est égale au module d'élasticité  $E$ . A la fois  $E$  et  $f_y$ , mais aussi l'ensemble de la courbe contrainte-déformation, sont supposés identiques en traction et en compression.

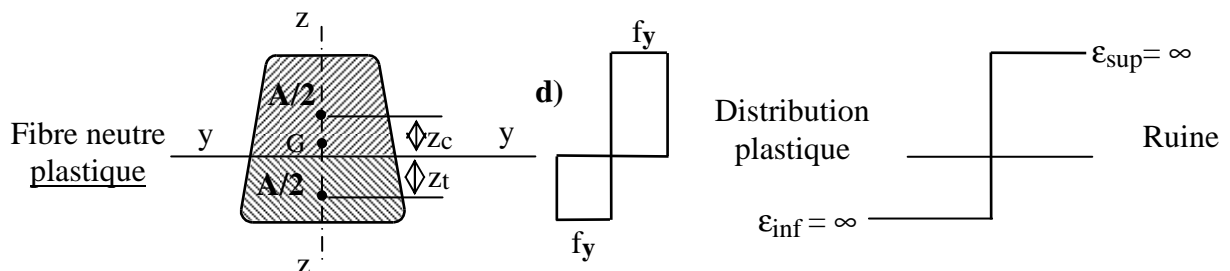
Bien que n'étant qu'un modèle mathématique, cette relation contrainte-déformation idéalisée donne une bonne approximation du comportement d'un acier doux. Les aciers au carbone s'en rapprochent fort (palier étendu, mais comportement discontinu dans ce palier, suivi d'une zone d'écrouissage), tandis que les aciers alliés ont un comportement plus complexe (absence de palier et limite élastique conventionnelle à 0,2%). C'est néanmoins une approche raisonnable en calcul des structures, car l'hypothèse de plasticité parfaite, après l'atteinte de la limite élastique, revient à ignorer les effets de l'écrouissage et se place ainsi du côté de la sécurité.

Considérons à présent une section transversale de poutre, d'aire  $A$ , possédant un axe de symétrie, soumise à une flexion pure dans le plan de symétrie ( $N$  et  $V$  sont supposés nuls). Regardons ce qui se passe dans la section, en conservant la loi de conservation des sections planes, et en considérant le comportement élasto-plastique de chaque « fibre d'acier ».

Si le moment fléchissant est faible, la contrainte et la déformation varient linéairement sur la hauteur, et quand il augmente, la limite élastique est d'abord atteinte au niveau de la fibre la plus éloignée du centre de gravité (cas a). Si le moment augmente encore (donc également la courbure de la poutre et les dilatations des fibres), la plastification s'étend du côté de la fibre la plus éloignée et la limite élastique est également atteinte dans la fibre opposée (cas b).



Si le moment de flexion continue à croître, la plastification se propage, à partir des fibres extrêmes, vers l'intérieur de la section (cas c), et, à la limite (pour une courbure infinie), on tend vers un diagramme bi-rectangulaire des contraintes, les deux zones de plastification tendant à se rejoindre (cas d). La section est alors complètement plastifiée.



Le moment fléchissant ultime correspondant à cette limite, est le plus grand moment que peut supporter la section, il s'appelle le **moment plastique  $M_{pl}$  de la section** et sa valeur peut être déduite des conditions d'équivalence.

On notera que le moment plastique est un concept idéalisé. En effet, ce moment ne peut être atteint que pour des déformations infinies, alors que la courbure de la pièce est physiquement limitée à  $\frac{1}{h/2}$  (pliage à 180°). D'un autre côté, les fibres extrêmes

atteignent des déformations telles que le phénomène d'écrouissage de l'acier peut s'y produire, permettant alors aux contraintes d'y augmenter au-delà de la limite élastique.

Ces deux remarques, dont l'influence s'avère négligeable dans la réalité, ne remettent pas en cause le concept de moment plastique, basé sur la conservation des sections planes et un comportement de l'acier « élastique-parfaitement plastique » (sans écrouissage).

S'il n'y a pas d'effort axial, la résultante des contraintes  $f_y$  dans la partie supérieure de la section (au-dessus de la fibre neutre plastique) doit être égale et opposée à celle dans la partie inférieure. L'axe neutre de la section entièrement plastifiée divise donc cette dernière en deux aires égales  $A/2$  (il ne correspond donc plus au centre de gravité de la

section). De plus, les résultantes égales et opposées de la zone supérieure (par exemple comprimée) et de la zone inférieure (par exemple tendue) forment un couple dont la valeur est celle du **moment ultime** :

$$M_{pl} = 0,5.A.f_y.z_c + 0,5.A.f_y.z_t = 0,5.A.f_y.(z_c + z_t),$$

où  $z_c$  et  $z_t$  (prises en valeur absolue) sont respectivement la distance du centre de gravité de la zone comprimée et celle de la zone tendue par rapport à l'axe neutre plastique, lorsque la section est entièrement plastifiée.

On remarquera que les quantités  $0,5.A.z_c$  et  $0,5.A.z_t$  ne sont rien d'autre que les moments statiques  $S_1$  et  $S_2$  de chaque demi-section transversale par rapport à l'axe de flexion plastique. Pour une section transversale doublement symétrique, les distances  $z_c$  et  $z_t$  sont égales et  $(0,5.A.z)$  est le moment statique  $S$  de la demi-section transversale par rapport à l'axe de flexion plastique.

Le moment ultime est alors donné par :  $M_{pl} = (S_1 + S_2).f_y$  ou  $2S.f_y$  si la section est doublement symétrique.

On constate alors que le moment plastique est proportionnel à une quantité géométrique, fonction de la forme et des dimensions de la section transversale qui, par similitude avec le calcul élastique, sera appelée le module plastique de la section pour la flexion selon l'axe considéré :  $W_{pl} = (S_1 + S_2)$  ou  $2S$ .

**Le module plastique est donc égal à la somme des valeurs absolues des moments statiques des deux demi-sections délimitées par l'axe neutre plastique.**

On a alors finalement la formule simple suivante pour le moment plastique :  $M_{pl} = W_{pl}.f_y$

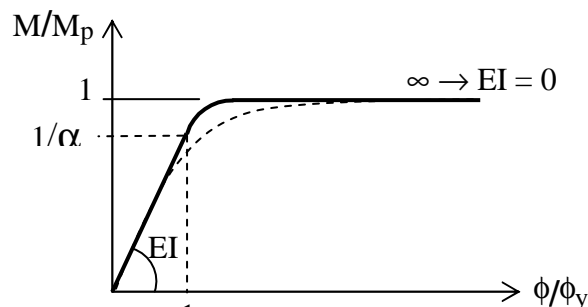
On se rappellera que le moment de flexion maximum que cette section transversale est capable de supporter sans dépasser la limite élastique en aucun point, appelé moment élastique, est donné par :  $M_{él} = W_{él}.f_y$  où  $W_{él}$  est le module élastique de la section pour la flexion suivant le même axe.

Le gain relatif de résistance qui est obtenu en autorisant une plastification complète de la section, peut alors être mesuré par le rapport entre les moments plastique et élastique d'une même section !

Ce rapport porte le nom de « facteur de forme  $\alpha$  » :  $\alpha = M_{pl} / M_{él} = W_{pl} / W_{él}$ . Il vaut par exemple 1,5 pour une section rectangulaire, 1,7 pour une section circulaire pleine et varie entre 1,12 et 1,18 pour les profilés en I, H et U, fléchis suivant leur axe fort y-y. Cette variation s'explique par le fait que la contrainte dans les fibres extrêmes de la section ne pouvant dépasser  $f_y$ , le bénéfice dû à la plastification provient principalement des moments intérieurs supplémentaires dus aux contraintes  $f_y$  des fibres proches de l'axe neutre plastique.

## 2.5.2 Loi Moment -rotation

Lors de la flexion élasto-plastique expliquée ci-avant, on peut, à tout moment, établir une relation entre le moment appliqué  $M$  et la rotation de la section  $\phi$ , c'est la loi moment-rotation « élasto-plastique » ( $M, \phi$ ). Elle est traduite en un diagramme non dimensionnel montrant l'évolution du rapport  $M/M_{pl}$  en fonction de  $\phi/\phi_y$ . Cette loi dépend de la forme de la section et a l'allure suivante :

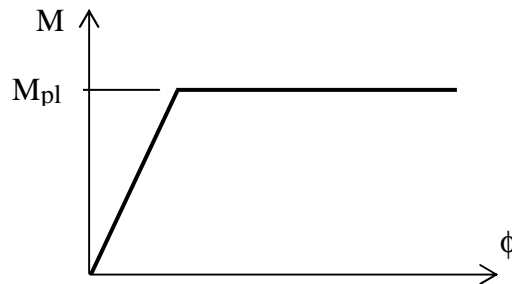


La partie droite inclinée du diagramme correspond au comportement élastique de la poutre. La partie courbe du diagramme correspond au passage du dernier état de contraintes élastique au diagramme bi-rectangulaire des contraintes dans la section complètement plastifiée (état élasto-plastique). Son étendue et son niveau sur l'axe des  $M$  seront donc fonction de la forme de la section. La partie horizontale du diagramme correspond à la flexion plastique de la poutre sous moment constant, le moment plastique.

Dès que la plasticité commence à se développer à l'intérieur de la section transversale, la valeur effective de sa rigidité flexionnelle,  $EI$ , diminue progressivement, pour s'annuler une fois la section complètement plastifiée.

Les contraintes résiduelles dans les poutres réelles ont une influence sur la loi moment-courbure (traits interrompus) car elles provoquent la plastification prématurée de la section. Elles ne modifient pas la valeur du moment plastique.

La loi moment-rotation ( $M, \phi$ ) précédente peut, à son tour, être idéalisée sous forme de deux droites comme indiqué ci-dessous, ce qui revient à admettre que la poutre a un comportement « élastique parfaitement plastique » : elle reste élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique est atteint, puis elle fléchit plastiquement sous moment constant.

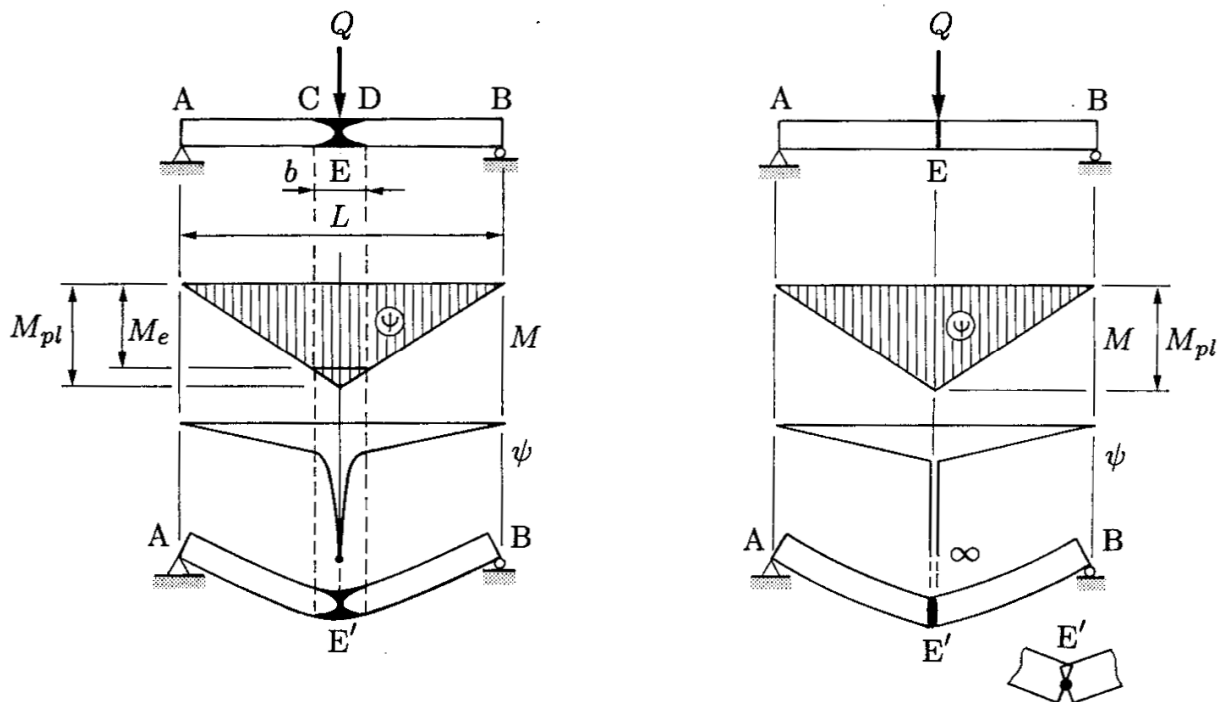


### 2.5.3 Rotule plastique

L'effort tranchant et l'effort normal, pour autant qu'ils ne soient pas importants, ont une faible influence sur la valeur du moment plastique. C'est pourquoi, la théorie de la flexion pure ci-avant peut s'appliquer aux poutres soumises à des charges transversales, voire à des colonnes comprimées et fléchies.

Considérons une poutre simple chargée d'une force concentrée  $P$  en son milieu et faisons croître  $P$  jusqu'à ce que le moment maximal sous la charge,  $PL/4$ , atteigne le moment plastique de la section  $M_{pl}$ .

Selon la loi moment-rotation « élasto-plastique », les déformations plastiques s'étendent sur la zone CD, de largeur  $b = (\alpha-1)L/\alpha$ , où le moment dépasse le moment élastique  $M_e$ , la courbure restant très faible, tant dans les portions élastiques AC et DB, qu'aux environs des extrémités C et D de la zone plastifiée. Par contre, près du point E où le moment atteint son maximum, la courbure est extrêmement forte. Il en résulte que la déformée de la poutre est due, essentiellement, à cette concentration de la courbure.

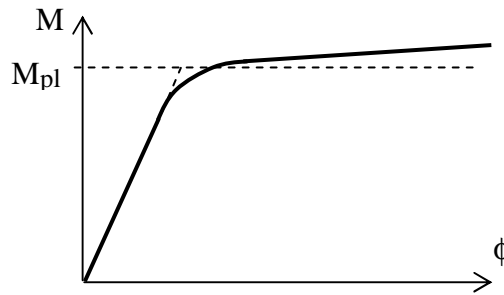


Si, à présent, on raisonne en utilisant la loi moment-rotation « élastique-parfaitement plastique », les déformations plastiques tendent à se concentrer dans la section E (moment maximum), la courbure restant faible sur toute la longueur de la poutre, sauf en E où elle est théoriquement infinie. La déformée de la poutre tend donc à présenter un point anguleux en E' et tout se passe comme si la poutre était formée de deux tronçons articulés entre eux au point E' de moment maximum  $M_{pl}$  : on dit qu'une **rotule plastique** s'est produite en ce point.

Vu que la zone des déformations importantes est très localisée (surtout pour les sections avec un faible facteur de forme), cette dernière façon de voir les choses est acceptable pour représenter la réalité !

En conclusion, dans la section où le moment est maximal, se forme une rotule plastique, c'est-à-dire une rotule à friction qui reste bloquée tant que le moment y est inférieur au moment plastique de la section  $M_{pl}$ , puis qui permet la rotation relative, dite rotation plastique, des deux tronçons de poutres dès que le moment atteint sa valeur plastique.

Signalons enfin, que si on procède expérimentalement au tracé d'un diagramme  $(M, \phi)$ , on obtiendra un tracé semblable à celui figurant ci-dessous, où on voit que la poutre peut résister à un moment plus grand que le moment plastique, et cela, grâce à l'écrouissage de l'acier (négligé dans le diagramme « élastique-parfaitement plastique »). L'écrouissage assure donc une réserve de résistance supplémentaire !



## 2.5.4 Analyse plastique d'une structure

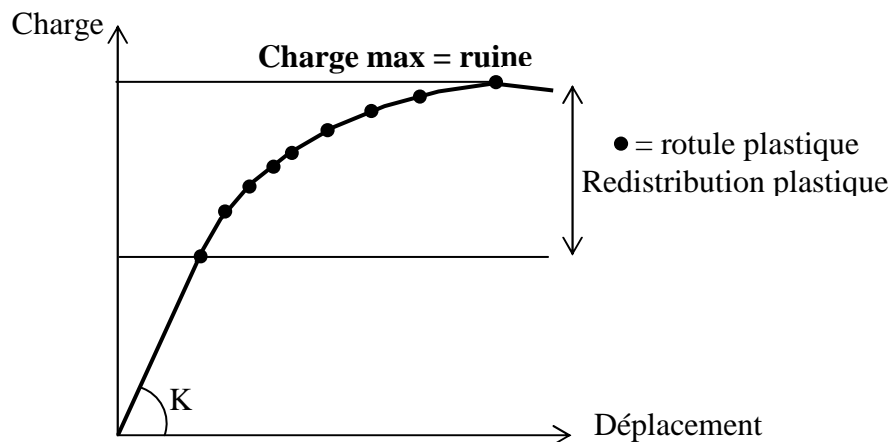
Considérons à présent une structure chargée. Au début du chargement, le comportement de la structure est élastique : il y a stricte proportionnalité entre les déplacements et le chargement. Quand le chargement augmente, la plastification apparaît en certains endroits des éléments et la structure subit des déformations élasto-plastiques. Si le chargement continue à croître, des rotules plastiques apparaîtront.

Une fois qu'une rotule plastique est formée, la structure se comporte, pour la suite du chargement, comme si une rotule réelle était introduite au niveau de la section plastifiée, ce qui provoque la réduction du degré d'hyperstaticité d'une unité. A partir de ce moment, la structure est dite « détériorée » et un changement dans la distribution des efforts internes sous la suite du chargement va intervenir : on dit qu'il y a « redistribution plastique des efforts ».

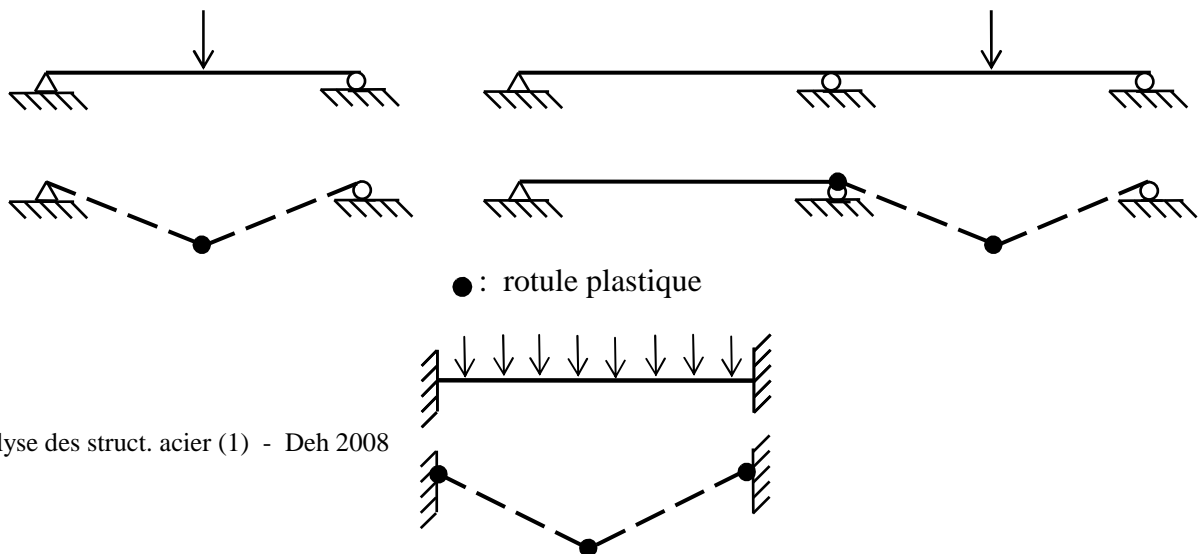
Toute rotule plastique supplémentaire a un effet similaire, et lorsqu'un nombre suffisant de rotules plastiques ont été formées pour transformer la structure initiale, redondante, en un mécanisme, la structure s'effondrera sous un chargement additionnel quelconque : c'est la ruine de la structure.

Une étude du mécanisme de ruine et la connaissance de l'intensité des charges qui le provoquent, permettent de déterminer le facteur (ou multiplicateur) de charge de la structure. Inversement, si le facteur de charge est précisé, la structure peut être calculée de telle manière que sa charge de ruine soit égale ou supérieure au produit du multiplicateur de charge par le chargement de référence.

Une analyse plastique implique donc qu'il n'y ait pas seulement distribution des contraintes plastiques à l'intérieur de sections (formation de rotules plastiques), mais également une redistribution suffisante des efforts (notamment les moments fléchissants) afin de développer toutes les rotules plastiques nécessaires à la naissance du mécanisme plastique. Il faut, en général, vérifier ultérieurement que les capacités de rotation sont suffisantes pour confirmer le mécanisme de ruine. De même, lorsque les diagrammes  $(M, \phi)$ , ne prennent pas en compte, dès le départ, l'influence éventuelle de l'effort normal et/ou tranchant sur le moment plastique, il faut procéder à une vérification ultérieure.



Exemples de mécanismes de ruine dans des structures simples :



On remarquera aisément que dans une structure isostatique, le gain de résistance dû à la plasticité dépend de la valeur du facteur de forme.

Dans une structure hyperstatique, il dépendra, en plus, du processus de redistribution des moments et s'avérera plus « rentable » dans ce type de structures.

L'analyse globale plastique d'une structure, prenant en compte la redistribution des contraintes à l'intérieur de sections transversales et la redistribution des efforts entre sections transversales, exige qu'il n'y ait pas d'autres formes de ruine (par instabilité locale et/ou globale) qui apparaissent avant l'atteinte du mécanisme de ruine plastique, de telle manière que la charge ultime puisse être atteinte.

Lorsqu'une rotule plastique apparaît au droit d'un assemblage, il convient, soit que celui-ci ait une résistance suffisante pour s'assurer que la rotule se développe dans la barre, soit qu'il soit capable de maintenir la résistance plastique avec une rotation suffisante.

Les conditions suivantes doivent donc être vérifiées pour qu'une analyse plastique soit autorisée :

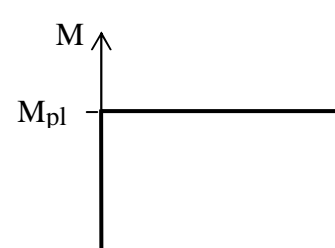
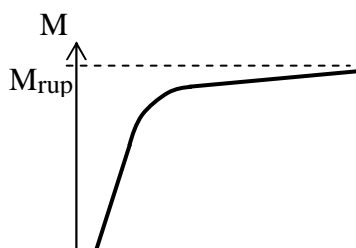
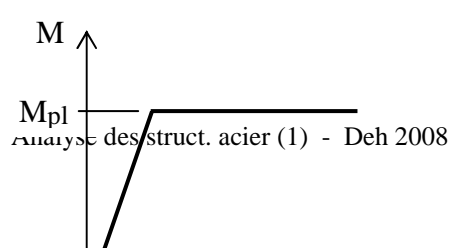
1. L'acier doit être suffisamment ductile, pour que la résistance plastique de la section puisse se développer. La relation contrainte-déformation bilinéaire «élastique-parfaitement plastique» peut être utilisée pour les nuances d'acier de construction de ductilité spécifiée précédemment. Une relation plus précise peut être adoptée ;
2. Une fois formée, une rotule plastique doit être capable de subir une rotation sous un moment plastique sensiblement constant en l'absence de tout phénomène d'instabilité élastique. Des mesures de maintien latéral et torsionnel de la section « ayant tourné » doivent être assurées. Parce que la plasticité provoque une grande réduction de la rigidité, les éléments où des rotules plastiques apparaissent, sont particulièrement sensibles à une ruine par instabilité (flambement, déversement). C'est pourquoi, des limites sévères existent sur les élancements de tels éléments structuraux conduisant à la nécessité d'un contreventement latéral approprié, surtout dans les zones d'apparition des rotules plastiques ;
3. Les sections des éléments devront posséder une capacité de rotation suffisante aux emplacements réels des rotules plastiques, que ce soit dans les barres ou dans les assemblages, afin que se développent les redistributions requises de moments. Elles devront satisfaire à des limites de proportions des semelles et âmes (classes 1 et 2) et ce, d'autant plus que la nuance de l'acier sera élevée (instabilité par voilement local) ;
4. La structure doit être soumise à un chargement statique prédominant (ou quasi-statique), de telle manière que la ruine ne puisse pas apparaître par fatigue. Tout danger de rupture fragile (effets d'entailles, basses températures, sollicitations par chocs, ...) doit être écarté.

L'analyse globale plastique permet donc de prendre en compte les effets de la non-linéarité de comportement des matériaux dans le calcul des effets des actions sur une structure. De plus, elle peut prendre en compte les effets de la géométrie déformée (effets du second ordre par exemple), ce qui est souvent nécessaire vu les déformations que doit subir la structure.

Elle nécessite généralement d'utiliser des programmes de calcul informatique qui appliquent les charges par incréments et prennent en compte des modèles plus réalistes pour les courbures élastiques et les déformations (diagrammes élasto-plastique tri-linéaire), que les méthodes manuelles.

Selon l'EC3-1-1, il convient de modéliser ce comportement par l'une des méthodes suivantes:

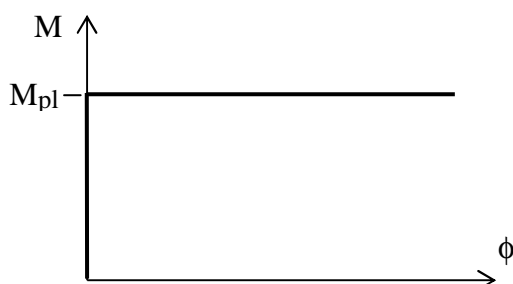
- analyse élastique-parfaitement plastique au premier ou second ordre, où les sections et/ou les assemblages demeurent élastiques jusqu'à ce que le moment résistant plastique soit atteint, après quoi ils deviennent parfaitement plastiques ; les déformations plastiques sont supposées concentrées aux endroits des rotules plastiques ; (croquis de gauche ci-après)
- analyse élasto-plastique au second ordre, où la plastification des sections et/ou les assemblages est plus progressive, et qui prend en compte la plastification partielle des sections et des barres le long de zones plastiques ; (croquis central ci-après)
- analyse rigide-plastique, dans laquelle le comportement élastique des barres, entre les sections ou assemblages où des rotules plastiques sont susceptibles de se former, est négligé ; les déformations plastiques sont concentrées dans les rotules plastiques supposées à capacité de rotation infinie. L'analyse rigide-plastique peut être appliquée s'il n'est pas nécessaire de considérer les effets de second ordre. Comme elle ne donne aucune indication sur les déformations de la structure, elle doit être complétée par une analyse élastique sous les charges de service ! (croquis de droite ci-après)



Notons enfin que l'analyse plastique étant essentiellement non linéaire, le principe de superposition n'est donc pas applicable.

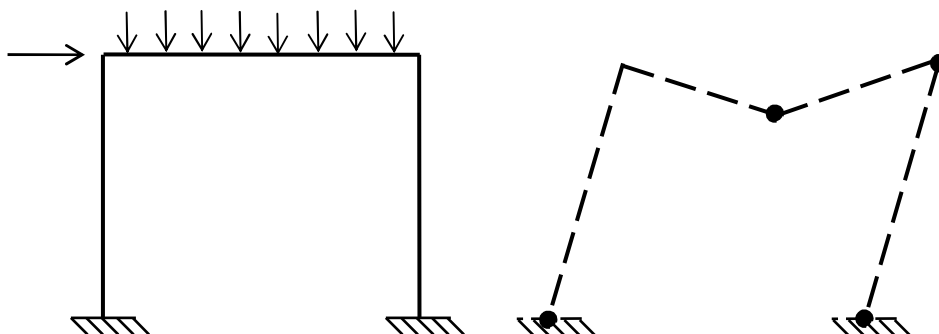
### 2.5.5 Analyse globale plastique «manuelle»

Les méthodes d'analyse manuelles qui sont basées sur les théorèmes fondamentaux (cinématique et statique) du calcul plastique, négligent les courbures élastiques devant les courbures plastiques et elles concentrent les déformations plastiques aux endroits de localisation des rotules plastiques ; elles consistent donc en une analyse « rigide-plastique ».



Une de ces méthodes de calcul, utilisée pour déterminer la charge ultime d'une structure, est **la méthode cinématique**. Elle consiste à envisager successivement, pour une structure et un chargement donnés, tous les mécanismes de ruine possibles. Pour chacun de ces mécanismes, on détermine la charge de ruine à l'aide du principe des travaux virtuels (assurance que la statique sera respectée). D'après le théorème cinématique, la **charge de ruine** (qui donnera le multiplicateur de charge) est la plus petite des charges ultimes trouvées.

Pour des structures simples, la méthode est aisée. Ci-dessous, le mécanisme de ruine complet retenu pour un portique :



Il est également nécessaire de devoir envisager des mécanismes d'effondrement partiels. Si deux mécanismes différents donnent la même valeur de la charge de ruine, le mécanisme de ruine finale est une combinaison des deux, formant ce qu'on appelle un mécanisme d'« effondrement hyper-complet ».

### 2.5.6 Analyse globale plastique «approchée»

Dans certaines circonstances, l'Eurocode autorise une redistribution forfaitaire et limitée des moments.

Lorsqu'à la suite d'une analyse élastique, des **poutres continues** présentent des pics de moments excédant la résistance plastique à la flexion d'au maximum 15%, il est possible, dans les conditions énoncées ci-dessous, de redistribuer dans toute poutre les parts en excès de ces pics de moments, procédant ainsi, par cette méthode simplifiée, à une redistribution plastique limitée. Les conditions à satisfaire pour cela sont les suivantes :

- les sollicitations dans l'ossature restent en équilibre avec les forces appliquées ;
- toutes les barres dans lesquelles les moments sont ainsi réduits ont des sections transversales « compactes » de classe 1 ou de classe 2 ;
- le déversement des poutres est empêché.

Cela signifie que le diagramme des moments élastiques peut être modifié en redistribuant jusqu'à 15 % du moment « aux appuis », à condition que les moments et les efforts tranchants obtenus restent en équilibre avec les charges extérieures appliquées et que les nouveaux moments « en travées » ne dépassent pas le moment résistant plastique.

Dans ce cas, bien que l'équilibre soit effectivement maintenu, la compatibilité élastique de la structure est quelque peu

violée. On peut considérer ce concept de redistribution des moments comme la reconnaissance très limitée du potentiel qui existe, dans les structures hyperstatiques, de résister à des charges supérieures à celles qui correspondent à la résistance élastique complète en flexion dans la seule section la plus sollicitée. Il convient de remarquer que cela n'est possible que si un déchargement ne suit pas l'atteinte d'une résistance locale maximale.

Il faut, en plus, qu'un comportement ductile de la section transversale soit imposé, ce qui explique les raisons de limiter ce principe de redistribution aux sections compactes (c'est-à-dire capables d'atteindre leur « moment plastique » sans voilement local).

Exemple :

