Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Janvier 2018
Durée : 1h30 mn

EXAMEN FINAL
Théorie d'élasticité
M1 CMM et VOA

Toute documentation est non autorisée

QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)

(2.00 Pts) 1) Pour des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 , définir l'état de contrainte pour les cas suivants :

i) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$

ii) $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0\ et\ \sigma_3 = 0$

ii) $\sigma_1 = -\sigma_2\ et\ \sigma_3 = 0$

ii) $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(2.00 Pts) 2) Montrer que dans le cas d'un tenseur de contraintes tridimensionnel, les contraintes principales sont déterminées par la solution de l'équation :

$$Det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

EXERCICE I (9.00 pts)

En un point donné d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit :

$$[\sigma]_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Avec : α une constante

(1.00 Pts) i) A quelle condition les équations d'équilibre seront-elles satisfaites si le milieu est en équilibre statique ?

(3.50 Pts) ii) Déterminer les contraintes et directions principales de ce tenseur.

(1.00 Pt) iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

(3.50 Pts) iv) Dans le plan (σ_n, τ), tracer les cercles de Mohr de l'état de contrainte en un point quelconque.

Représenter sur ces cercles de Mohr, le vecteur contrainte appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

EXERCICE II (7.00 pts)

On vous demande d'écrire toutes les conditions aux limites en contraintes pour les deux cas suivants :

(3.50 Pts) **Cas I :** Il s'agit d'une poutre console de longueur « L » et de section transversale (2h x 2h) soumise à un cisaillement uniforme τ_0 sur les faces ABB'A' ; BDD'B' et CDD'C' et à une charge décroissante linéairement de « q_0 » à « 0 » sur la face ABB'A' (Voir figure 1).

(3.50 Pts) **Cas II :** Il s'agit d'un massif prismatique en béton qui sert à retenir l'eau limité à l'amont par le plan (S_0) faisant un angle « α » avec l'axe des « x » et à l'aval par le plan (S_1) faisant un angle « β » avec l'axe des « x » (voir figure 2)

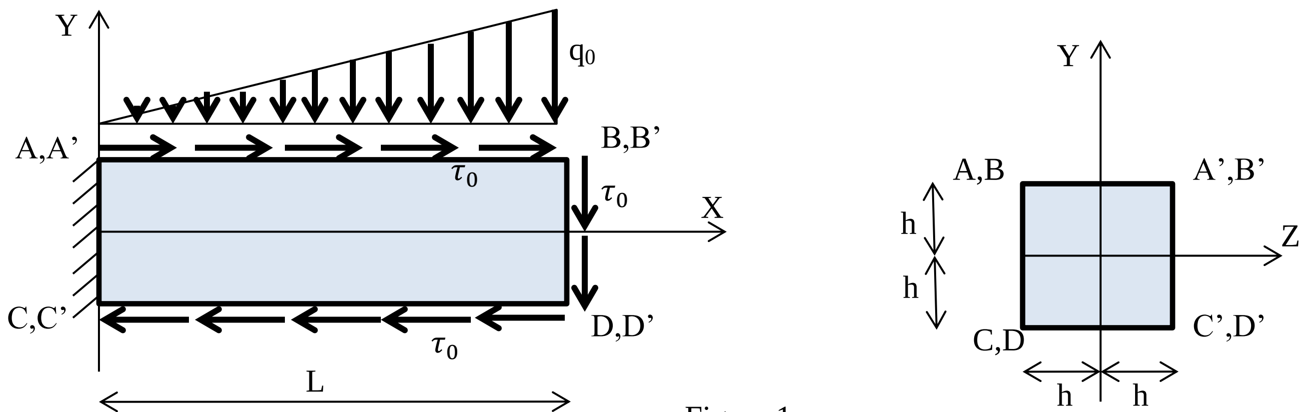
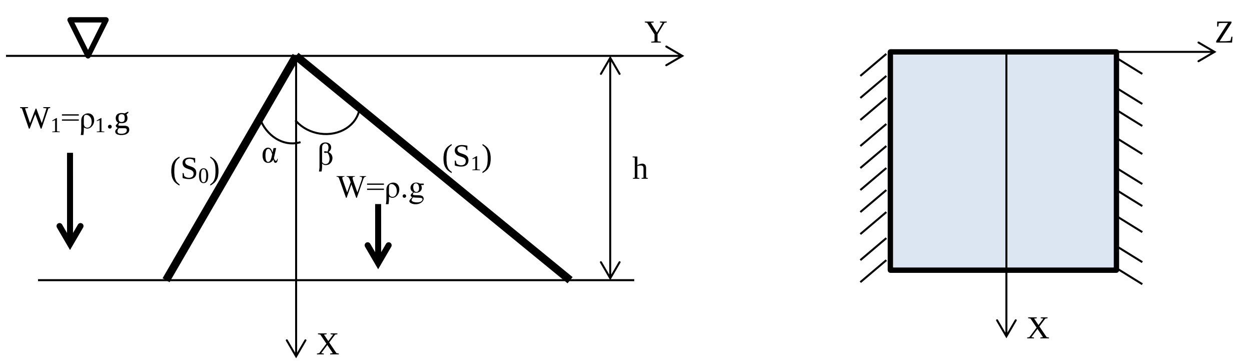


Figure 1



ρ_1 : masse volumique de l'eau
ρ : masse volumique du béton

Figure 2

BON COURAGE
Pr Abdellatif MEGNOUNIF

Correction Examen Final " Elasticité "
M1 CM1 et VOA

exercice 1.

$$[\sigma]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

i/ Eq. d'équilibre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 & \Rightarrow X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 & \Rightarrow Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 & \Rightarrow Z = 0 \end{cases}$$

forces de volume négligées

(1,0)

ii/ Contraintes et directions principales

$$\left([\sigma] - \sigma[I]\right)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\left|[\sigma] - \sigma[I]\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \alpha \\ 0 & -\sigma & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma[2\alpha^2 - \sigma^2] = 0$$

$$\sigma[2\alpha^2 - \sigma^2] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2} \;;\; \sigma_2 = 0 \;;\; \sigma_3 = \alpha\sqrt{2}}$$

(1,5)

Direction principales

- $\sigma = \sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{2} & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha\sqrt{2} & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{2}\, l_1 + \alpha n_1 = 0 \\ \alpha\sqrt{2}\, m_1 - \alpha n_1 = 0 \\ \alpha l_1 - \alpha m_1 + \alpha\sqrt{2}\, n_1 = 0 \\ \text{et } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_1 = \mp\frac{1}{2} \;;\; m_1 = \pm\frac{1}{2} \;;\; n_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(0,75)

- $\sigma = \sigma_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha n_2 = 0 \\ -\alpha n_2 = 0 \\ \alpha l_2 + \alpha m_2 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{l_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; n_2 = 0}$$

(0,5)

• $\underline{\sigma_2 = \sigma_3 = \alpha\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2} & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha\sqrt{2} & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\sqrt{2}\, l_3 + \alpha n_3 = 0 \\ -\alpha\sqrt{2}\, m_3 - \alpha n_3 = 0 \\ \alpha l_3 - \alpha m_3 - \alpha\sqrt{2}\, n_3 = 0 \\ \text{et } l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{l_3 = \pm\frac{1}{2} \; ; \; m_3 = \mp\frac{1}{2} \; ; \; n_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ (0,75)

iii/ Cisaillement maximal

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|-\alpha\sqrt{2} - \alpha\sqrt{2}\right| \Rightarrow \tau_1 = \alpha\sqrt{2}$$

$$\tau_2 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|0 - \alpha\sqrt{2}\right| \Rightarrow \tau_2 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$$

$$\tau_3 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \pm\frac{1}{2}\left|-\alpha\sqrt{2} - 0\right| \Rightarrow \tau_3 = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2}$$

$$\tau_{max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \alpha\sqrt{2}}$$ (1,0)

iv/ 03 cercle de Mohr ou bien Tri-cercle de Mohr

$$\begin{cases} \sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \\ \sigma^2 = \tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^3 \\ \text{et } \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

03 equations à 03 inconnues "l^2", "m^2" et "n^2"

sachant que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, la resolution du système donne

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$ (1,0)

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

les dénominateurs sont toujours positifs. Pour que "l^2", (m^2) et "n^2" soient positifs, il faut que les numérateurs soient positifs

Soit :

$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) > 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0 \end{cases}$$

On peut réécrire ces inégalités sous la forme suivante

$$\begin{cases} \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2 \\ \tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$ (1,0)

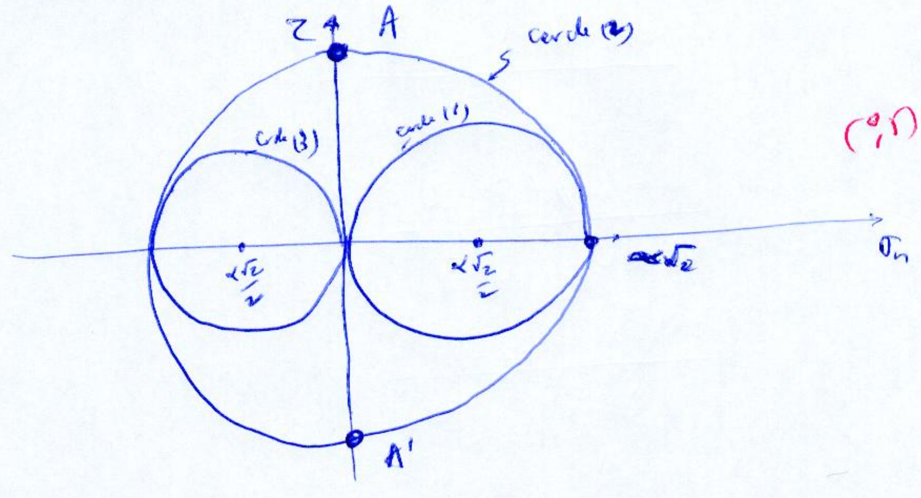
Dans le repère (σ_n, τ), on a des éq. de cercles

1° cercle : centre $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$

2° cercle : centre $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$

3° cercle : centre $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ et rayon $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

Ainsi : avec $\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$; $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \alpha\sqrt{2}$ on a :



(0,5)

Représenter sur ce tricercle, le point appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.

bissectrice (x,z) positif $\Rightarrow$ $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

or $\sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$

et $\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \left(\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2\right) - \left(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3\right)^2$

avec $\sigma_1 = -\alpha\sqrt{2}$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = \alpha\sqrt{2}$

et $l = +\frac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$ et $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on

On aura :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= 0 \\ \tau &= \pm\alpha\sqrt{2} \end{aligned}}$$

(1,0)

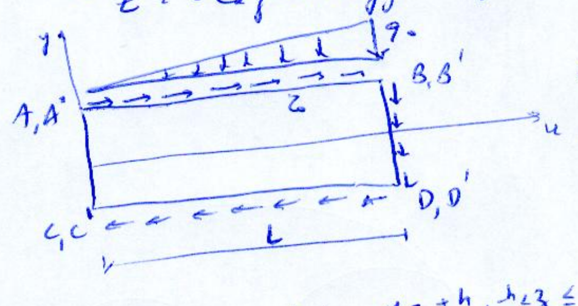
point sur figure points A et A'.

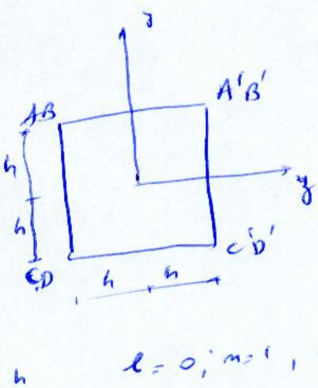
Exercice 2.

Conditions aux limites

$$\begin{cases} \bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy} + n\,\tau_{xz} \\ \bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{yz} \\ \bar{Z} = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z \end{cases}$$

Cas I :





$l = 0$; $m = 1$, $n = 0$

Face $AA'BB'$ $\quad 0 \le x \le L$, $\quad y = +h$, $-h \le z \le h$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X} &= \tau_{xy} = \tau_0 \\ \bar{Y} &= \sigma_y = q_0\,\frac{x}{L} \\ \bar{Z} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned}}$$

(1,0)

⊙ Face $BB'DD'$ $\quad x = L;\ -h \le y \le h\ \ -h \le z \le h \qquad l = 1,\ m = n = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar X &= \sigma_x = 0 \\ \bar Y &= \tau_{xy} = -\tau_0 \\ \bar Z &= \tau_{xz} = 0 \end{aligned}} \qquad (1,0)$$

⊙ Face $CC'DD'$ $\quad 0 \le x \le L;\ \ y = -h,\ -h \le z \le h \qquad l = 0,\ m = -1,\ n = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar X &= -\tau_{xy} = -\tau_0 \\ \bar Y &= -\sigma_y = 0 \\ \bar Z &= -\tau_{yz} = 0 \end{aligned}} \qquad (1,0)$$

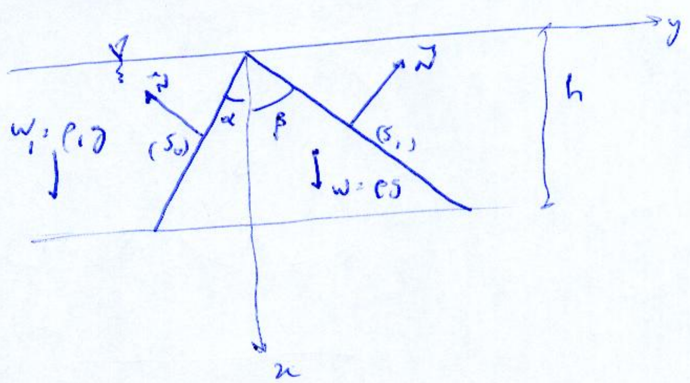
⊙ Face $ABCD$ $\quad 0 \le x \le L,\ -h \le y \le h,\ z = -h \quad l = m = 0,\ n = -1$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar X &= -\tau_{xz} = 0 \\ \bar Y &= -\tau_{yz} = 0 \\ \bar Z &= -\sigma_z = 0 \end{aligned}} \qquad (0,K)$$

⊙ Face $A'B'C'D'$ $\quad 0 \le x \le L;\ -h \le y \le h \quad z = h \qquad l = m = 0,\ n = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar X &= \tau_{xz} = 0 \\ \bar Y &= \tau_{yz} = 0 \\ \bar Z &= \sigma_z = 0 \end{aligned}} \qquad (0,K)$$

Cas II



⊙ Sur (S_0)

équation de la droite (S_0) $y + tg\alpha\, x = 0$

l'angle $= \frac{3\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha \\ m = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy} + n\,\tau_{xz} \\ \bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y + n\,\tau_{yz} \\ \bar{Z} = l\,\tau_{xz} + m\,\tau_{yz} + n\,\sigma_z \end{cases} \Rightarrow$$

On est dans le plan x, y $\Rightarrow$ $\bar{X} = l\,\sigma_x + m\,\tau_{xy}$

$\bar{Y} = l\,\tau_{xy} + m\,\sigma_y$

d'où
$$\begin{cases} -\sin\alpha\,\sigma_x - \cos\alpha\,\tau_{xy} = \bar{X} \\ -\sin\alpha\,\tau_{xy} - \cos\alpha\,\sigma_y = \bar{Y} \end{cases}$$

or
$$\begin{cases} \bar{X} = \rho_e g x \sin\alpha \\ \bar{Y} = \rho_e g x \cos\alpha \end{cases}$$
la pression de l'eau

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sin\alpha\,\sigma_x - \cos\alpha\,\tau_{xy} = \rho_e g x \sin\alpha \\ -\sin\alpha\,\tau_{xy} - \cos\alpha\,\sigma_y = \rho_e g x \cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} tg\alpha\,(\sigma_x + \rho_e g x) + \tau_{xy} = 0 \\ tg\alpha\,\tau_{xy} + (\sigma_y + \rho_e g x) = 0 \end{matrix}}$$ (1,75)

⊙ Sur (S_1) l'angle $= \frac{\pi}{2} + \beta$ $\Rightarrow$ $l = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\beta$

$m = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\beta$

$\bar{X} = \bar{Y} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} tg\beta\,\sigma_x - \tau_{xy} = 0 \\ tg\beta\,\tau_{xy} - \sigma_y = 0 \end{matrix}}$$ (1,75)