Université A. Belkaid TLEMCEN
Faculté de Technologie, Dpt Génie Civil
Janvier 2018
Durée : 1h30 mn

# EXAMEN FINAL
## Dynamique des Structures
## M1 Construction métallique et Mixte (CMM)

**Toute documentation est non autorisée**

**QUESTIONS DE COURS (4.00 pts)**

**(1.50 Pt)** 1) Donner une définition complète des coefficients d'influence $k_{ij}$ ; $c_{ij}$ et $m_{ij}$ de la rigidité, l'amortissement et la masse.

**(0.50 Pts)** 2) Que représente un coefficient d'amplification dynamique ?

**(2.00 Pts)** 3) Démonter l'expression du décrément logarithmique : $\Delta = 2.\pi.\xi$

**EXERCICE I (8.00 pts)**

Le portique de la figure 1 possède un plancher infiniment rigide, est soumis à une force sinusoïdale horizontale $P(t) = P_0 \sin \Omega.t$, avec une fréquence de 50 Hz et une amplitude de 40 KN, appliquée à son sommet. On a mesuré le déplacement relatif maximal en régime permanent au sommet et on a trouvé égal à 5 mm.

On donne : E = 200 GPa ; I=150 $10^6$ $mm^4$ ; H=3.0 m

**(3.00 Pts)** 1) En négligeant l'amortissement, calculer la fréquence propre du système.

**(2.00 Pts)** 2) Déterminer les forces maximales transmises aux fondations et tracer les diagrammes des moments de flexion maxima.

**(3.00 Pts)** 3) En deuxième étape, on décide de placer un amortissement au sommet du portique ayant une constante d'amortissement C=$10^4$ kg/s. Est-ce que les forces transmises aux fondations augmentent ou diminuent ? Justifier.

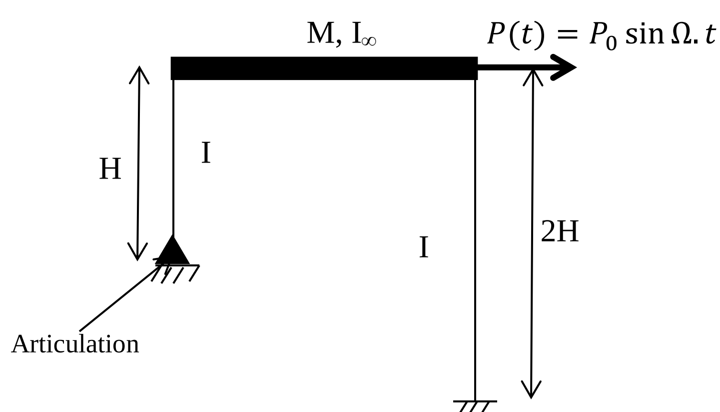



Figure 1

**Rappel** : Le coefficient d'amplification dynamique pour les charges harmoniques d'un système amorti est :

$$\boldsymbol{D = [(1 - r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2]^{-\frac{1}{2}}}$$

**<u>EXERCICE II (8.00 pts)</u>**

On considère un portique à 02 étages de la figure 2. Le plancher intermédiaire a une masse négligeable et on ne s'intéresse qu'au déplacement horizontal du 2ème étage. Les planchers sont considérés infiniment rigides et l'amortissement est négligeable.

On donne : $M=3$ t ; $K=10^6$ N/m ; E = 200 000 MPa ; I=200 $10^5$ $mm^4$ ; H=3.0 m

**(1.00 Pts)** 1) Dessiner le modèle du système fondamental masse-ressort de ce portique.

**(2.50 Pts)** 2) Calculer la rigidité équivalente de ce système $K_{eq}$. En déduire la pulsation, fréquence et période propres de cette structure.

**(2.00 Pts)** 3) Si le portique est soumis à une force harmonique $P(t) = P_0 \cos \Omega.t$ appliquée horizontalement au niveau du 2ème plancher, calculer le déplacement relatif maximal du portique en **régime permanent.** On donne $P_0$= 50 KN et $\Omega$=30 rd/s

**(2.50 Pts)** 4) En gardant la masse constante, serait-ce une bonne idée de multiplier la période propre par « 2 » pour diminuer le déplacement maximal en régime permanent ? Justifier

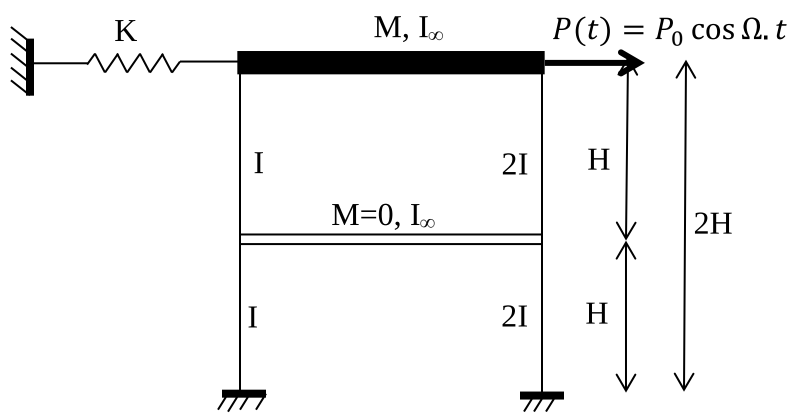


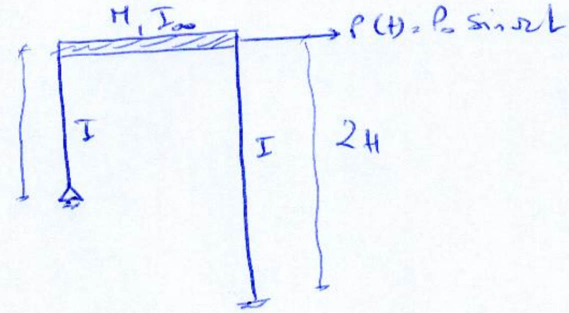

Figure 2

**BON COURAGE**
**Pr Abdellatif MEGNOUNIF**

Correction Examen Final — Janvier 2018

DDS — M1- CMA

## Exercice 1




$E = 200$ GPa

$I = 150.10^6$ mm$^4$

$H = 3.0$ m

$P_0 = 40$ kN

$U = 5$ mm

1) Rigidité équivalente ?

$$K_1 = \frac{3EI}{H^3} \; ; \quad K_2 = \frac{12EI}{(2H)^3}$$

$K_1, K_2$ parallèle $\Rightarrow$ $K_{eq} = K_1 + K_2 = \dfrac{3EI}{H^3} + \dfrac{12EI}{8H^3}$ $\boxed{K_{eq} = \dfrac{9EI}{2H^3}}$

(1,0) $$K_{eq} = \frac{9 \times 2\times 10^{11} \times 150.10^{-6}}{2\,(3)^3}$$ $\boxed{K_{eq} = 5.10^6 \text{ N/m}}$

$f_p$ : fréquence de la force $P(t) = 50$ Hz

$\Rightarrow \Omega = 2\pi f_p = 2\pi . 50 \Rightarrow \underline{\Omega = 314.16 \text{ rd/s}}$

Système non amorti, force harmonique

$$U = U_0 . D \quad \text{avec} \quad D = \left| \frac{1}{1-r^2} \right| \qquad r = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

avec $U_0 = \dfrac{P_0}{K_{eq}} = \dfrac{40.10^3}{5.10^6} \Rightarrow \underline{U_0 = 0.008 \text{ m}}$

$$\Rightarrow |1-r^2| = \frac{U_0}{U} \Rightarrow 1 - r^2 = \frac{U_0}{|U|} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 1 - \dfrac{U_0}{U} \\ r^2 = 1 + \dfrac{U_0}{U} \end{cases}$$

(1,0)

or $\dfrac{U_0}{U} = \dfrac{8}{5} > 1 \Rightarrow r^2 = 1 - \dfrac{U_0}{U}$ à rejeter

d'où $\Rightarrow r^2 = 1 + \dfrac{U_0}{U}$

$$r = \sqrt{1 + \frac{U_0}{U}} \Rightarrow \frac{\Omega}{w_0} = \sqrt{1 + \frac{U_0}{U}} \Rightarrow w_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \frac{U_0}{U}}}$$

$$w_0 = \frac{314.16}{\sqrt{1 + \frac{8}{5}}} \qquad \boxed{w_0 = 194.833 \text{ rd/s}}$$

frequence propre $f = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{194.833}{2\pi}$ (1,0) $\boxed{f \simeq 31 \ Hz}$

2/ Forces maximals transmits

Poteau court: $F_1 = K_1 . U_{max} = \frac{3EI}{H^3} . U_{max}$

(0.5) $F_1 = \frac{3 . 2.10^{11} . 150.10^{-6}}{(3)^3} . 0.005 = \underline{16.67} \text{ kN}$

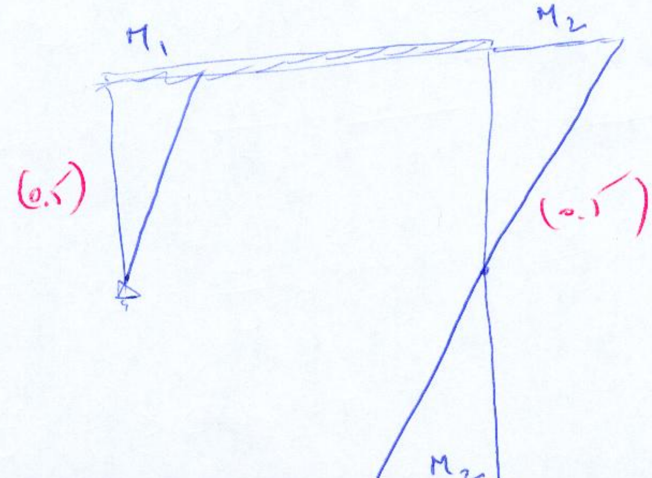
Poteau long: $F_2 = \frac{12EI}{(2H)^3} . U_{max} = \frac{12 . 2.10^{11} . 150.10^{-6}}{(2 \times 3)^3} . 0.005$

(0.5) $\underline{F_2 = 8.34} \text{ kN}$

Diagramme de $M_f$:

$M_1 = F_1 . H = 16.67 \times 3 \Rightarrow M_1 = 50. \text{ kN.m}$

$M_2 = F_2 . \left(\frac{2H}{2}\right) = 8.34 \times \frac{6}{2} \Rightarrow M_2 \simeq 25 \text{ kN.m}$




(2)

3/ Système amorti $c = 10^4$ Kg/s

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \text{avec} \quad r = \frac{\Omega}{\omega_0} \text{ et } \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} \Rightarrow m = \frac{K_{eq}}{\omega_0^2} = \frac{5.10^6}{(194.833)^2} \qquad \boxed{m = 131.72 \text{ Kg}}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{10^4}{2.131{,}72 \times 194.833} \qquad \underline{\xi = 0.195}$$

(1,0)

$$r = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{314.16}{194.833} = 1.612$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-(1.612)^2)^2 + (2 \times 0.195 \times 1.612)^2}} \qquad \underline{\underline{D = 0.582}}$$

$$U_{max} = D.\,U_0 = 0.582 \times 0.008 \qquad \underline{U_{max} = 0.0046\text{ m}}$$

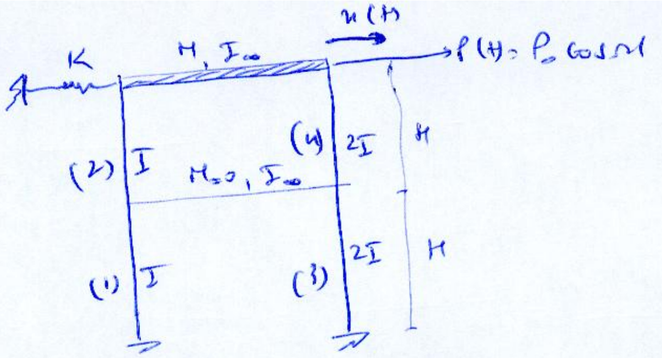
<u>Ainsi</u>

<u>Poteau court</u>, $F_1 = K_1.U_{max} = \frac{3EI}{H^3}.\,0.0046$ $\quad \underline{F_1 = 15.34 \text{ KN}}$

<u>Poteau long</u> $F_2 = K_2.U_{max} = \frac{12EI}{(2H)^3}.\,0.0046$ $\quad \underline{F_2 = 7.67 \text{ KN}}$

(2,0) Les forces transmises diminuent.

Exercice 2




$M = 3\ t$

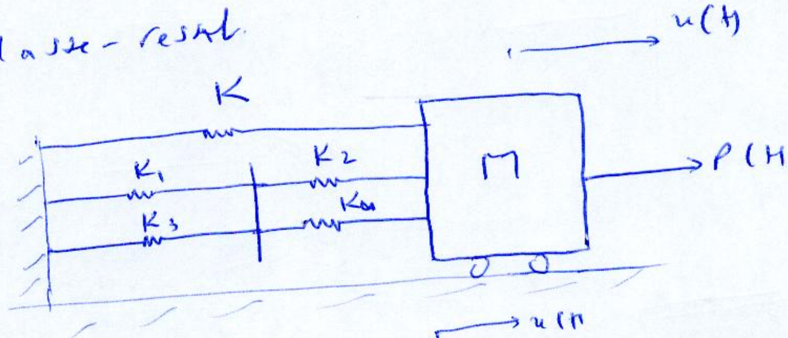
$K = 10^6\ N/m$

$E = 200.000\ MPa$

$I = 200.10^5\ mm^4$

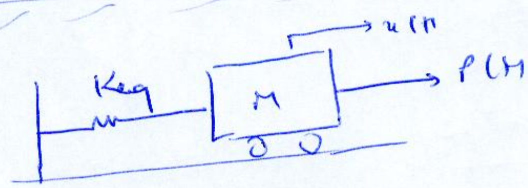
$H = 3.0\ m$

1) Modèle Masse-ressort




(1,0)

≡

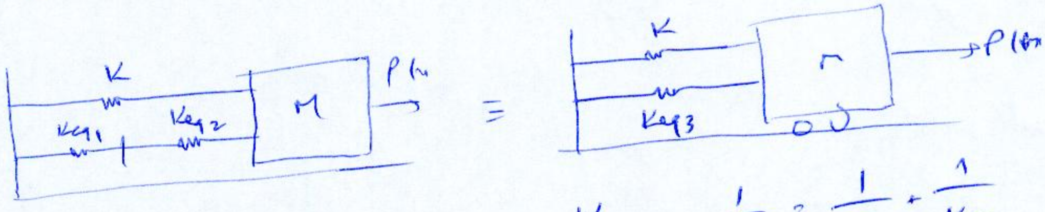



2) Rigidité équivalente ?

$$K_1 = K_2 = \frac{12EI}{H^3} \ ; \qquad K_3 = K_4 = \frac{12E(2I)}{H^3}$$

$K_1, K_3$ en // $\rightarrow$ $K_{eq_1} = K_1 + K_3 = \frac{12EI}{H^3} + \frac{12E(2I)}{H^3} = \frac{12(3EI)}{H^3}$

$K_2 ; K_4$ en // $\rightarrow$ $K_{eq_2} = K_2 + K_4 = \frac{12E(I)}{H^3} + \frac{12E(2I)}{H^3} = \frac{12(3EI)}{H^3}$




$K_{eq_1}$ et $K_{eq_2}$ sont en série $\Rightarrow$ $K_{eq_3}$ : $\frac{1}{K_{eq_3}} = \frac{1}{K_{eq_1}} + \frac{1}{K_{eq_2}}$

$$\frac{1}{K_{eq_3}} = \frac{H^3}{12(3EI)} + \frac{H^3}{12(3EI)} \Rightarrow \boxed{K_{eq_3} = \frac{12(3EI)}{2H^3}}$$

(4)

En fin

$K$ ; $K_{eq_3}$ sont // $\Rightarrow$ $K_{eq} = K + K_{eq_3} = K + \dfrac{12\,(3EI)}{2H^3}$

$$\boxed{K_{eq} = K + \frac{12\,(3EI)}{2H^3}} \quad K : K \text{ du ressort}$$

(1,0)

AN $K_{eq} = 10^6 + \dfrac{12 \times 3 \times 2 \times 10^{11} \times 200\ 10^{-7}}{2 \times 3^3}$ $\boxed{K_{eq} = 3.67\ 10^6\ N/m}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{3.67.10^6}{3.10^3}} \quad \boxed{\omega_0 = 34.97\ rd/s}$$

(0,5)

$f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{34.97}{2\pi} = \underline{\underline{5.57\ Hz}}$ (0,5) $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \underline{\underline{0,179}}\ s$ (0,5)

3/ Système non amorti. $P(t) = P_0 \cos \Omega t$ $\quad P_0 = 50\,kN$ ; $\Omega = 30\ rd/s$

$D = \dfrac{U}{U_0} \Rightarrow U = U_0 . D$ avec $D = \left| \dfrac{1}{1-r^2} \right|$

$r = \dfrac{\Omega}{\omega_0} = \dfrac{30}{34.97} = 0,8578 \Rightarrow D = \dfrac{1}{1-(0,8578)^2} \Rightarrow \boxed{D = 3.785}$

(2,0) $U_{max} = U_0 D = \dfrac{P_0}{K_{eq}} . D = \dfrac{50.10^3}{3.67.10^6} . 3.785$ $\boxed{U_{max} = 5.16\ cm}$

4/ $T_1 = 2\,T_0$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ et $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \dfrac{T_1}{T_0} = 2 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} . \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{\omega_0}{\omega_1}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\omega_0}{\omega_1} = 2}$ or $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_{eq_0}}{m}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{K_{eq_1}}{m}}$

or $U_{max_1} = D_1 . U_0$

$D_1 = \left| \dfrac{1}{1-r_1^2} \right|$ avec $r_1 = \dfrac{\Omega}{\omega_1} = \dfrac{\Omega}{\omega_0/2} = 2\dfrac{\Omega}{\omega_0} = 2r$

(5)

Ainsi $D_1 = \left| \frac{1}{1-(2r)^2} \right| = \left| \frac{1}{1-4r^2} \right|$

avec $r = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0{,}8578 \Rightarrow \underline{D_1 = 0.5146}$

d'où $U_{max_1} = U_0 D_1$

or $U_0 = \frac{P_0}{K_{eq_1}}$ et $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{K_{eq_0}}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{K_{eq_1}}} = 2$

$\Rightarrow \frac{K_{eq_0}}{K_{eq_1}} = 4 \Rightarrow K_{eq_1} = K_{eq_0}/4$

d'où $U_0 = \frac{P_0}{K_{eq_0}/4} \Rightarrow U_{max_1} = 4 \cdot \frac{P_0}{K_{eq_0}} \cdot D_1$

(2.5) $U_{max_1} = 4 \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{3{,}67 \cdot 10^6} \cdot 0.5146 = \boxed{U_{max_1} = 2.804 \text{ cm}}$

Donc le deplacement a diminué en augmentant la periode

La periode a été augmenté du double $(T_1 = 2T_0)$

et la rigidité a été reduite au quart $K_{eq_1} = K_{eq_0}/4$

la masse est restée constante.

<u>Donc</u> Conclusion

le deplacement dynamique maximal

est passé de 5,16 cm à 2.804 cm