Université Mustapha Stambouli - Mascara

Faculté des Sciences Exactes **13/01/2019**

2 ème Mathématique **Durée 1h 30 mn**

Examen d'Analyse 3

Exercice 1 : (6.5 *points*)

1) Déterminer la nature des séries suivantes :

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\quad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+n},\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2},\quad d)\sum_{n=1}^{\infty}n.n^{\frac{1}{n}}.$$

Soit la série de terme général $(1-\alpha)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer les valeurs de α pour que cette série soit convergente.

3) Déduire sa somme.

4) Trouver les deux nombres réels a et b tels que : $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$.

5) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Indication : Pour la nature de la série d) calculer $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2 : (4 *points*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f_n la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x)$ convergence simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2) Étudier la convergence uniforme de $f_n(x)$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3 : (4 *points*)

1) Calculer le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$.

2) Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$.

3) Déduire les sommes des deux séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{3^n}$.

Exercice 4 : (6 *points*)

Soit f la fonction 2π-périodique égale à $|\sin x|$.

1) Déterminer sa série de Fourier.

2) En Déduire les sommes suivantes :

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1},\quad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1},\quad iii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Exercice 1 :
a) On a $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann $\alpha = 1$)
alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge. . . . . **(0.5)**
b) On a $\frac{2^n+1}{3^n+n} \sim \frac{2^n}{3^n}$ car $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n} \times \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{n}{3^n}} = 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique $k = \frac{2}{3} < 1$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}$ converge . . . . **(0.5)**
c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$
alors $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ converge. . . . . **(0.5)**
d) On a $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = 1$ alors $\lim_{n\to\infty} nn^{\frac{1}{n}} = +\infty$
donc $\sum_{n=1}^{\infty} nn^{\frac{1}{n}}$ diverge. . . . . **(0.5)**
2)La série $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n$ est convergente ssi $|1-\alpha| < 1$ il vient $0 < \alpha < 2$. . . . . **(1)**
3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n = \frac{1}{\alpha}$. . . . . **(0.5)**
$a = \frac{1}{2}$. . . . . **(0.5)**
$b = \frac{-1}{2}$. . . . . **(0.5)**
3)$U_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1} = \left(\frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n}\right) + \left(\frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1}\right)$

$$n = 2, \quad U_1 = \left(\frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{2}\right) + \left(\frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{3}\right)$$
$$n = 3, \quad U_2 = \left(\frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{3}\right) + \left(\frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{4}\right)$$
$$n = 4, \quad U_3 = \left(\frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{4}\right) + \left(\frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{5}\right)$$
$$\vdots$$
$$n = N, \quad U_N - 1 = \left(\frac{1/2}{N-1} - \frac{1/2}{N}\right) + \left(\frac{1/2}{N} - \frac{1/2}{N+1}\right).$$

Donc $S_N = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)}\right)$. . . . . **(1.5)**
Par suite $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{3}{4}$. . . . . **(0.5)**

Exercice 2 : 1) - Si $0 \le x < 1$, on écrit $f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^n)}$ . . . . **(0.5)**
donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. . . . . **(0.5)**
- Si $x = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$. . . . . **(0.5)**
- Si $x > 1$ alors $f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}} = xf_n(\frac{1}{x})$, puisque $0 < \frac{1}{x} < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(\frac{1}{x}) = 1$
donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} xf_n(\frac{1}{x}) = x$. . . . . **(0.5)**
Donc $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On remarque que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ . . . . **(0.5)**
Pour tout $x \ge 0$ on a $f_n(x) \ge f(x)$
2) Pour étudier la convergence uniforme, on regarde sur les intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty]$.
- Sur $[0,1]$, on a $|f_n(x) - f(x)| = (1+x^n)^{\frac{1}{n}} - 1| \le 2^{\frac{1}{n}} - 1$. . . . . **(0.5)**
- Sur $[1,+\infty]$ on étudier la variation de $|f_n(x) - f(x)| = |(1+x^n)^{\frac{1}{n}} - x| = g_n(x)$ il vient $g_n'(x) = \frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1}nx^{n-1} - 1 = x^{n-1}(1+x^n)^{\frac{1-n}{n}} - 1 = (1+x^{-n})^{\frac{1-n}{n}} - 1 = \frac{1}{(1+x^{-n})^{\frac{n-1}{n}}} - 1.$
On déduit que $g_n'(x) < 0$ donc $f_n - f$ est décroissante. Alors $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \le f_n(1) - f(1)$. . . . . **(1)**
Donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty}(2^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$ par suite $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 : 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, donc le rayon de convergence $R = 1$. . . . . **(1)**

2)$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ . . . . **(1)**

3) On pose $x = \frac{1}{2}$ il vient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \frac{\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1$. . . . . **(1)**

On a $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^{n-1} = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$.

On pose $x = \frac{1}{3}$ il vient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^3}\right) = \frac{3}{4}$. **(1)**

Exercice 4 : La fonction f est paire . . . . **(0.5)**
donc $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. . . . . **(1)**
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$ . . . . **(0.5)**
- Si $n > 1$ on a $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)dx =$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$$ . . . . **(1)**

Les coefficients impairs sont nul. Alors $a_{2k} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$ . . . . **(0.5)**

d'où la série de Fourier est $S_f(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$. . . . . **(0.5)**

La série converge pour tout x.
On prend $x = 0$ il vient $f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}$.
D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$. . . . . **(0.5)**
On a aussi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$.
D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. . . . . **(0.5)**
Par l'égélité de Parceval on trouve
$\frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = 1.$
D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$. . . . . **(1)**