Université de Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

2^{eme} ANNEE Master. Analyse Math.
Analyse de Fourier
Année Universitaire: 2018/2019

Examen du 1^{er} semestre $\left(\text{Durée } 1^{H}30^{mn}\right)$

Exercice 1 (06 pts)

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + x^2\psi(x)$$

   Et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$$

2. Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$; On pose:

$$I_\varepsilon(\varphi) := \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

   Montrer que la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\varphi)$ existe.

3. On pose, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right); \varphi\right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\varphi)$$

   Montrer que l'on définit ainsi une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 2.

4. Montrer que, dans $D'(\mathbb{R})$, $Vp(\frac{1}{x})' = -Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 2 (06 pts)

1. Soit $\alpha > 0$; calculer la limite dans $S'(\mathbb{R})$ de la distribution $\dfrac{1}{x + i\alpha\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

2. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $H(x)e^{-\lambda x}$; où $\lambda > 0$ et H est la fonction de Heavside

3. En déduire la transformée de Fourier de la distribution H.

4. Trouver la transformée de Fourier de $Vp(\frac{1}{x})$.

<u>Exercice 3</u> (08 pts)

On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a. On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k\geq 1}$ par:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \\ T_k = T_{k-1} * T_1; \forall k \geq 2. \end{cases}$$

1) Calculer $\delta_a * \delta_b$ et déduire que T_k s'écrire comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.

2) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{T_k}$ de la distribution à support compact T_k.

3) Pour $k \geq 1$, On pose $f_k(\xi) = \widehat{T_k}(\frac{\xi}{\sqrt{k}})$. Montrer que $f_k \in S'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

4) On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier.Montrer que la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Correction:

Exercice 1 (06 pts=1.5$\times 4$)

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; On applique la formule de Taylor avec reste integral à φ à l'ordre 2:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\int_0^1 (1-t)\varphi''(tx)dt$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\psi(x) = \int_0^1 (1-t)\varphi''(tx)dt$ Alors: ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad |\psi(x)| \leq \int_0^1 (1-t)\,|\varphi''(tx)|\,dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$$

D'où: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$.

2. Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que: $supp\varphi \subset [-M, M]$; on a:

$$I_\varepsilon(\varphi) = \varphi(0)\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \varphi'(0)\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

Alors; par imparité de $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x} = 0$ et

$$\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{M}$$

Donc:

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)dx - \frac{2\varphi(0)}{M}$$

Comme $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{M\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)dx = \int_{M\geq|x|} \psi(x)dx$ d'où: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\varphi)$ existe bien.

3. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact; soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $supp\varphi \subset K$; Alors $\exists M > 0$; $K \subset [-M, M]$, on a:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| &= \left|\int_{M\geq|x|} \psi(x)dx - \frac{2\varphi(0)}{M}\right| \\ &\leq c \sup_{x\in\mathbb{R};|k|\leq 2} \left|\varphi^{(k)}(x)\right| \end{aligned}$$

Donc $Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est bien une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre au plus 2.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $M > 0$ tel que: $supp\varphi \subset [-M, M]$; Alors:

$$\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right)'; \varphi\right\rangle = -\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right); \varphi'\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}dx$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}dx &= \int_{M\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}dx \\ &= -\frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{M\geq|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx \end{aligned}$$

Or; En applique Taylor avec reste intégrale à φ à l'ordre 1 on trouve:

$$-\frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}=-\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}-(\psi(\varepsilon)-\psi(-\varepsilon))$$

D'où:

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}dx=-\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx-\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right)=-\left\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right),\varphi\right\rangle$$

Donc: $Vp(\frac{1}{x})'=-Pf\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

<u>Exercice 2</u> (06 pts=2+1+1.5+1.5)

1. Soit $\alpha>0$; soit $\varphi\in S(\mathbb{R})$; on définit: $\langle u_\varepsilon,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}dx$; Trouvons $\lim\limits_{\varepsilon\xrightarrow{>}0}u_\varepsilon$

$$\langle u_\varepsilon,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2+(\varepsilon\alpha)^2}dx-i\varepsilon\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x^2+(\varepsilon\alpha)^2}dx$$

On a:

$$\lim_{\varepsilon\xrightarrow{>}0}\int_0^{+\infty}x\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2+(\varepsilon\alpha)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx=\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle$$

De même:

$$\lim_{\varepsilon\xrightarrow{>}0}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(\varepsilon\alpha x)+\varphi(-\varepsilon\alpha x)}{1+x^2}dx=\pi\varphi(0)$$

Donc On obtient: $\lim\limits_{\varepsilon\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x+i\varepsilon\alpha}=Vp\left(\frac{1}{x}\right)-i\pi\delta$ dans S'.

2. Transformation de Fourier de la fonction $H(x)e^{-\lambda x}$; $\lambda>0$

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\lambda+i\xi}$$

3. Si on fait tendre λ vers 0, le théorème de convergence dominée assure que dans $S'(\mathbb{R})$; la distribution $H(x)e^{-\lambda x}$ converge vers H.

   La transformation de Fourier est continue dans S', il suffit de déterminer la limite de: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\lambda+ix}$ (au sens de S')

$$\begin{aligned}\widehat{H}&=\lim_{\lambda\to 0}\widehat{He^{-\lambda x}}=\lim_{\lambda\to 0}\widehat{He^{-\lambda x}}\\&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\lambda+ix}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta-iVp\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

4. On a $Vp\left(\frac{1}{x}\right)=i\sqrt{2\pi}\widehat{H}-i\pi\delta$ d'où

$$\begin{aligned}\widehat{Vp\left(\frac{1}{x}\right)}&=i\sqrt{2\pi}\breve{H}-i\pi\widehat{\delta}\\&=i\sqrt{2\pi}(1-H)-\frac{i\pi}{\sqrt{2\pi}}\\&=i\sqrt{2\pi}(\frac{1}{2}-H)\end{aligned}$$

Exercice 3 (08 pts)

1. Tout d'abord, on remarque que comme $\sup p(T*S) \subset \sup pT + \sup pS$, puisque T_1 est à support compact, on montre par récurrence que tout les T_k sont aussi à support compact.

   (01pt) Soit a et b dans $\mathbb{R}$, on a: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi(x+.)\rangle\rangle \\ &= \langle \delta_a, \varphi(x+b)\rangle \\ &= \varphi(a+b) \\ &= \langle \delta_{a+b}, \varphi\rangle \end{aligned}$$

   Donc $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

   (0.5pt) On peut alors calculer T_k soit $k \geq 2$

$$\begin{aligned} T_k &= T_1 * T_1 * ... * T_1 \\ &= T_1^{*k} = \frac{1}{2^k}(\delta_1 + \delta_{-1})^{*k} \end{aligned}$$

   (01pt) Or $*$ est commutatif est associatif, on peut donc appliquer la formule du binome de Newton pour obtenu:

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \delta_1^{*j} * \delta_{-1}^{*(k-j)} \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \delta_j * \delta_{j-k} \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \delta_{2j-k} \end{aligned}$$

   Donc: $\forall k \geq 2$, $T_k = \frac{1}{2^k}\sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j \delta_{2j-k}$

2. **(01pt)** Comme $T_k = T_1^{*k}$, on a: $\widehat{T_k(\xi)} = \left(\widehat{T}_1(\xi)\right)^k$ Or: $\widehat{T_1(\xi)} = \frac{1}{2}(e^{-i\xi} + e^{i\xi}) = \cos(\xi)$ Donc: $\widehat{T_k(\xi)} = (\cos\xi)^k$ et $\widehat{T_k}$ est bien C^∞ (ce que l'on savait déja car $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$)

3. **(0.5pt)** D'aprés 2, on a: $\forall k \geq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}, f_k(\xi) = (\cos(\frac{\xi}{\sqrt{k}}))^k$. Alors $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$, donc $f_k \in S'(\mathbb{R})$;

   (01.5pt) Pour montrer la convergence de f_k dans $S'(\mathbb{R})$. On fixe $\varphi \in S(\mathbb{R})$ et on cherche la limite éventielle de $\langle f_k, \varphi\rangle$, Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a:

$$\forall k \geq 1, \;\; \langle f_k, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

   On fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $k \geq 4|\xi|^2$, on a $\dfrac{|\xi|}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$ et $\cos(\frac{\xi}{\sqrt{k}}) \geq 0$ or $\cos(\frac{\xi}{\sqrt{k}}) = 1 - \frac{\xi^2}{k} + o(\frac{\xi^2}{k})$ et $\log f_k(\xi) = k\log(\cos(\frac{\xi}{\sqrt{k}})) = k\log(1 - \frac{\xi^2}{k} + o(\frac{\xi^2}{k})) = -\frac{\xi^2}{2} + o(\frac{\xi^2}{k})$.

D'ou: $\lim\limits_{k\to+\infty} \log f_k(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.Or: $\forall \xi \in \mathbb{R}, |f_k(\xi)\varphi(\xi)| \leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ et est indépendant de k, donc par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\varphi(\xi)d\xi \\ &= \left\langle e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

(01pt) D'ou: $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

4. **(01.5pt)** Soit $g_k \in S'(\mathbb{R})$ telle que: $f_k = \mathcal{F}(g_k)$. Alors par la continuite de $\mathcal{F}$ dans $S'(\mathbb{R})$, on déduit de la convergence dans $S'(\mathbb{R})$ de $(f_k)_{k\geq 1}$ dans $S'(\mathbb{R})$, la convergence de $(g_k)_{k\geq 1}$ dans $S'(\mathbb{R})$ De plus, $(g_k)_{k\geq 1}$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{\xi^2}{2}})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{\xi^2}{2}})(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Donc, dans $S'(\mathbb{R})$, $g_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.