Université de Mascara
Département de Mathématiques
$2^e$ année Math (LMD)

07/01/2019
Module : Algèbre 3
Durée :1h30mn

---

E X A M E N

---

**Exercice 0.1.** *(11 pts) On considère la matrice suivante :*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Montrer que 1 est une valeur propre de A.*

(2) *Montrer que* $(1, 2, 1)$ *est un vecteur propre de A.*

(3) *Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A. En déduire le polynôme minimal de A.*

(4) *A est elle inversible ?*

(5) *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 1-(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 6(-1)^n-2 & 2-2(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 5-(-1)^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 0.2.** *(09 pts) On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Montrer que A est nilpotente. En déduire les valeurs propres, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A*

(2) *Déterminer la réduite de Jordan de A.*

(3) *Montrer que A est semblable à*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

***Bonne Chance***

Université de Mascara
Département de Mathématiques
2$^{e}$ année Math (LMD)

Module : Algèbre 3

C O R R E C T I O N

**Exercice 0.1.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Montrons que 1 est une valeur propre de A.*
*On a*

$$P_A(1) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3-2 & -3 & 1 \\ 2 & -4-2 & 2 \\ 1 & -3 & 3-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_1 = L_3)$$

*Alors 1 est une valeur propre de A.*

(2) *Montrons que (1, 2, 1) est un vecteur propre de A :*
*On a*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-2 & -3 & 1 \\ 2 & -4-2 & 2 \\ 1 & -3 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Alors (1,2,1) est un vecteur propre associé a la valeur propre -1.*

(3) *Déterminons les valeurs propres :*

$$\begin{aligned} P_A(1) &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 2\lambda-2 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} \quad (L_1 - L_3) \\ &= \frac{1}{8}(2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4-2\lambda & 4 \\ 1 & -3 & 4-2\lambda \end{vmatrix} \quad (C_1 + C_3) \\ &= \frac{1}{8}(2-2\lambda)(4\lambda^2 - 4) = -(1-\lambda)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

*Alors les valeurs propres de A sont* $\lambda_1 = 1(racine\ double)$ *et* $\lambda_2 = -1(racine\ simple)$

(4) *Déterminons les sous espaces propres de A.*
*Pour* $\lambda = -1$
*On a (-1) est une valeur propre simple associée au vecteur (1,2,1) alors le sous espace propre* $E_{-1}$ *est de dimension 1. On conclut que*

$$E_{-1} = \{\alpha(1,2,1)/\alpha \in \mathbb{R}\}$$

<u>*Pour $\lambda = 1$*</u>

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{c}3x-3y+z=2x\\2x-4y+2z=2y\\x-3y+3z=2z\end{array}\right.\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{c}x-3y+z=0\\2x-6y+2z=0\\x-3y+z=0\end{array}\right.\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\{\ x=3y-z\ \}=\{y(3,1,0)+z(-1,0,1)/y,z\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

*On remarque que $dimE_1 = 2$ alors $A$ est diagonalisable. On conclut que le polynome minimal de $A$ est $m_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$.*

(5) *$A$ est inversible car $detA = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = (1)^2(-1) = -1 \neq 0$*

(6) *Montrons par récurrence que :*

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 1-(-1)^n\\2-2(-1)^n & 6(-1)^n-2 & 2-2(-1)^n\\1-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 5-(-1)^n\end{pmatrix}$$

*Pour n=0, On a*

$$A^0=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5-1 & 3-3 & 1-1\\2-2 & 6-2 & 2-2\\1-1 & 3-3 & 5-1\end{pmatrix}=I_3\quad (vraie)$$

.

*Pour n=1, On a*

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5-(-1) & 3(-1)-3 & 1-(-1)\\2-2(-1) & 6(-1)-2 & 2-2(-1)\\1-(-1) & 3(-1)-3 & 5-(-1)\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6 & -6 & 2\\4 & -8 & 4\\2 & -6 & 6\end{pmatrix}=A\quad (vraie).$$

*On suppose qu'elle est vraie pour n et on la montre pour (n+1). On a*

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A.A^n=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\2 & -4 & 2\\1 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 1-(-1)^n\\2-2(-1)^n & 6(-1)^n-2 & 2-2(-1)^n\\1-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 5-(-1)^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}10+4(-1)^n & -6(-1)^n-6 & 2+2(-1)^n\\4+4(-1)^n & -12(-1)^n-4 & 4+4(-1)^n\\2+2(-1)^n & -6(-1)^n-6 & 10+2(-1)^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}5-(-1)^{n+1} & 3(-1)^{n+1}-3 & 1-(-1)^{n+1}\\2-2(-1)^{n+1} & 6(-1)^{n+1}-2 & 2-2(-1)^{n+1}\\1-(-1)^{n+1} & 3(-1)^{n+1}-3 & 5-(-1)^{n+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Exercice 0.2.** *(09 pts) On considère la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\-2 & -2 & 6\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

(1) *Montrons que A est nilpotente :*

$$AA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*$A$ est nilpotente alors*

(a) *les valeurs propres de $A$ sont $\lambda = 0$*

(b) *le polynôme minimal de $A$ est $m_A(\lambda) = \lambda^2$*

(c) *le polynôme caractéristique de $A$ est $P_A(\lambda) = -\lambda^3$*

(2) *Déterminons la réduite de Jordan de A :*
*cherchons la dimension du sous espace propre ;*

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{c} -x-y+3z=0 \\ -2x-2y+6z=0 \\ -x-y+3z=0 \end{array} \right. \} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y+3z\} = \{y(-1,1,0)+z(3,0,1)/y,z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

*$dimE_0 = 2$ il y a deux blocs de Jordan $j_1(0)$ et $j_2(0)$ tels que $(ordj_1(0) = 2 \wedge ordj_1(0) + ordj_2(0) = 3) \to ordj_2(0) = 1$*
*Alors la réduite de Jordan de A est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) *Montrons que A est semblable à*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*On a*

$$B.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Alors B est nilpotente et elle admet le même polynome minimal et le même polynome caractéristique que A. Pour montrer que A et B sont semblables il suffit de montrer qu'elles ont la même dimension du sous espace propre.*

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\} \\ &= \{x(1,0,0) + z(0,0,1)/x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

*$dimE_0 = 2$ alors A et B sont semblables.*