Correction d'examen DE Eq diff

Exercice1(06points)

(0,5) 1) $\text{F}(x,y) = 2y \quad - y^2$ est continue en $x_0 = 0$ $et\ de\ C^1 en\ y_0 = 1$

Donc d'après theoréme d'existence et l'unicité (P) $admet\ unique\ solution\ de C^1$

1) Montrer que $y(x) > 0\ \forall x \in I$,
$on\ raisonne\ par\ l'absurde\ comme\ y\ est\ continue\ cela\ revient$

à $supposer$ qu'il existe $x_1 \in I\ tel\ que\ y(x_1) = 0$ Ainsi $y\ est\ solution\ du\ problème\ de\ Cauchy$

$$\begin{cases} y' = 2y \quad - y^2 \\ \quad y(x_1) = 0 \end{cases} \qquad (\ 01)$$

D'un autre coté la fonction nulle est solution de meme problème . Donc par l'unicité des solutions impossible. De même on montre que $y(x)$<2

$on\ suppose$ qu'il existe $x_2 \in I\ tel\ que\ y(x_2) = 2$ Ainsi $y\ est\ solution\ du\ problème\ de\ Cauchy$

$$\begin{cases} y' = 2y \quad - y^2 \\ \quad y(x_2) = 2 \end{cases} \qquad (\ 01)$$

D'un autre coté la fonction $y(x)$=2 est solution de meme problème . Donc par l'unicité des solutions impossible

2) D'après le question 2 , $F(x,y)\ est\ bornée\ alors\ y\ est\ globale$ (0,5)
3) **Calcul de y: (3points)**
   $y' = 2y \quad - y^2$ (E) c'est une eq.$de\ Bernoulli\ avec\ k = 2$
   Multipliant (E) par y^{-2}, on obtient

$$-y^{-2}y' = 2y^{-1} - 1 \text{ et on pose } z = y^{-1} \Rightarrow z' = \frac{-y'}{y^2}$$

(E)$\Rightarrow -z' = 2z - 1 \qquad (E')$ Eq . linéaire A.S.M

Etape 1 : E.S.S.MTapez une équation ici.

$$-z' = 2z \qquad (E'_0)$$

$(E'_0) \Rightarrow \frac{dz}{z} = -2dx$

$\Rightarrow \quad lnz = -2x + c\ , \quad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_0(x) = c_1\ e^{-2x};\ c_1 \in \mathbb{R}$

Etape2 : E.A.S.M

On suppose $z(x) = c_1(x)e^{-2x}$ solution de(E')

On obtient alors $\quad c_1'(x) = e^{2x} \Rightarrow c_1(x) = \frac{e^{2x}}{2} + k$

Donc $z(x) = \left(\frac{e^{2x}}{2} + k\right)(e^{-2x})$ .Ainsi

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\left(\frac{e^{2x}}{2} + k\right)(e^{-2x})}$$

Conclusion

$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}}$ solution de (P)

Exercice2 (5points) : 1) On résoud le système suivant :

$(I) \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X + \text{ pour } X(0)\ donné \end{cases}$

On pose A$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=$A_1 + A_2$ (0,5)

$A_1 est\ diagonale\ et\ A_2 est\ nilpotante$(p=3)

On remarque que

$$A_1A_2 = A_2A_1$$

Donc $e^{At} = e^{A_1t}e^{A_2t}$ (0,5)

$A_1 est\ diagonale \Rightarrow \quad e^{A_1t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ (1)

On a $e^{A_2t} = \sum_{n=0}^{2} \frac{A^n t^n}{n!}$ =$I_{\mathbb{R}^n} + A_1t + A^2{}_1 \frac{t^2}{2}$=$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5)

$Alors\ e^{At} = \ e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1)

On sait que $e^{A(t-s)} = \varphi(t,s)$

Par conséquent $X(t) = \ e^{At}X_0$ (0,5)

Exercice3 :(5points)

Soit $(E)\ x''(t) + a(t)\,x(t) = 0$

Posons $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$ (0,5)

$(E) \Leftrightarrow (S)\,\frac{dX}{dt} = A(t)X$

Comme $f_{1\ et}\ f_2$ sont deux solutions indépendantes de (E)

$x(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$ (01)

On obtient

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) \\ x_2(t) = c_1f_1{}' + c_2f_2{}' \end{cases}$$

Il suffit donc prendre la matrice fondamentale

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} \qquad (01)$$

Car $W(f_1, f_2)(t) = det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0$ (01)

$$\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{W(f_1,f_2)(s)} \begin{pmatrix} f_2'(s) & -f_2(s) \\ -f_1'(s) & f_1\ (s) \end{pmatrix} \qquad (01)$$

$alors\ \ la\, résolvante\ \ \varphi(t,s) = \varphi(t)\varphi^{-1}(s)$.(0,5)

Exercice4 :(4points)

1) les points d'équilibres :

On pose $F(x,y) = \begin{pmatrix} x(x\ \ - x^2 - y^2) \\ y(y - y^2 - x^2) \end{pmatrix}$

Les points des équilibres sont $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(0{,}25)$

$$F(x,y) = 0$$

Donc il y a 4 équilibres : $(0,0); (0,1); (1,0); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (2)

2) Etudier la stabilité de (0 ,0) :

$$DF(X) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -2xy & 2y - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix} \qquad (0{,}5)$$

$$DF(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{B} \qquad (0{,}25)$$

Les valeurs propres de B sont $\lambda = 0$ $(0{,}5)$

On peut pas conclure. $(0{,}5)$