Correction de l'examen de l'equation de la physique mathématique 2018-2019

Exercice 1 *(1pt+2pts+3pts)*

1. *Des exemples des EDP à coefficient constant complexe :*
   - L'opératuer de Schrödinger $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \triangle$
   - L'opérateur de Chausy Rienmman $\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}$
2. *Théorème le principe du maximum :*
   Soit Ω *un ouvert borné et conexe de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* U *une fonction de classe* C^2 *dans* Ω *continue dans* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
   Si U *est une solution dans* Ω *de* $\triangle U(x,y) = 0$ *alors* U *atteint son maximum sur le bord de* Ω
3. *Le système suivant :*
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \end{cases}$$
   modélise une corde (idéal) de longueur l $(l > 0)$ *fixée à ses deux extrimités et le déplacement (vertical) initial est noté* $f(x)$ *et lavitesse initial est noté* $g(x)$.
   $u(x,t)$ *est le déplaceent vertical de cette corde qu'on cherche à déterminer au pts* $(0 \leq x \leq l)$ *au temps* t $(t \geq 0)$.

Exercice 2 *(1.5pts+1.5pts+3.5pts+0.5pt)*
Soit l'EDP linéaire d'ordre deux suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2y^2$$

1. *Le type de l'équation :*
   On a : D(t,x)=0
   l'équation est de type parabolique.

2. *Les courbes caractéristiques sont données par :*
$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$
   C'est-à-dire : $x\frac{dy}{dx} - y = 0$
3. *Soit le changement de variable* $X = x$ *et* $Y = \frac{y}{x}$, *on obtient par des calculs classiques :*

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Y}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$

en obtient dans la suite :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = x^2 y^2$$

alors soit la forme standard : $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = X^2 Y^2$

4. *La solution générale de l'équation :*

   On en déduit de la question 3 que : $= \frac{X^3}{3} Y^2 + f(Y)$, *avec* f *fonction arbitraire, qui s'intègre et donne :*

$$u = \frac{X^4}{12} Y^2 + X f(Y) + g(Y)$$

   , f *et* g *étant deux fonctions arbitraires.*
   On obtient la solution générale de l'équation considérée

$$u(x, y) = \frac{1}{12} x^2 y^2 + x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

   f *et* g *étant deux fonctions arbitraires.*

Exercice 3 *(2pts+2pts)*
Pour montrer que la fonctions $v_\lambda : (t, x) \longmapsto u(t, x - \lambda)$ *est une solution,* $v_\lambda(t, x) = u(t, x - \lambda)$
$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x - \lambda)$
$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x - \lambda)$
$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x - \lambda)$

$$(v_\lambda)_{tt}(t, x) - (v_\lambda)_{xx}(t, x) = u_{tt}(t, x - \lambda) - u_{xx}(t, x - \lambda) = 0$$

De la même façon, on prouve que w_λ *est une solution de l'équation des Ondes donnée.*

Exercice 4 *(1pt+1pt+1pt)*
On a :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} cos s ds$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2c}(sin(x + ct) - sin(x - ct))$$