Université Mustapha STAMBOULI Mascara
Faculté des Sciences Exacts
Département d'informatiques

1 ere année L.M.D
Analyse I
Année Universitaire : 2018/2019

Correction d'examen du 7 Janvier 2019

Exercice 1 *(question de cours)*($3pts + 2pts$)

$ *On veut montrer que toute suite convergente est bornée ; En effet*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vert le réel l. En appliquant le définition de la limite avec* $s = 1$*, on obtient*

$\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N$*, on ait* $|U_n - l| \leq 1$ *et donc pour* $n \geq N$*, on a*

$$|U_n| = |l + (U_n - l)| \leq |l| + |U_n - l| \leq |l| + 1$$

Donc, si on pose

$$M = \max(|U_0|, |U_1|, |U_2| \cdots |U_{N-1}|, |l| + 1)$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M$.

$ *La reciproque est fasse.*

contre-exemple; *on pose* $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\cos x}$ *est une suite bornée par 1 et qui n'est pas convergente.*

Exercice 2 ($2pts + 2pts + 1pts$)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *des nombres réels dont le terme général est défini par :*

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad n \geq 0, U_{n+1} = \sqrt{2U_n - 1}.$$

1. *On montre par réccurence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.
   - $ *On vérifie que* $U_0 = 2 \geq 1$ *(vrai)*
   - $ *On suppose que* $U_n \geq 1$
   - $ *On montre que* $U_{n+1} \geq 1$ *; en effet*

     On a $U_n \geq 1 \Rightarrow 2 \to U_n \geq 2 \Rightarrow 2U_n - 1 \geq 1$

     donc $U_{n+1} \geq 1$

     Alors $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.
2. *On va étudier la monotonie de la suites* $(U_n)_{n\geq 0}$ *;*

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sqrt{2U_n - 1} - U_n \\ &= \frac{(\sqrt{2U_n - 1} - U_n)(\sqrt{2U_n - 1} + U_n)}{\sqrt{2U_n - 1} + U_n} \\ &= \frac{-(U_n - 1)^2}{\sqrt{2U_n - 1} + U_n} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc U_n *est décroissante.*

$\Rightarrow$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dcroissante*

3. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minore par* 1 : *Alors la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ; c'est à dire*

$\lim U_n = l$

$l = \sqrt{2l - 1} \Rightarrow l^2 - l + 1 = 0 \Rightarrow l = 1$

Exercice 3 $(1.5pts + 1pts + 1.5pts + 1pts)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$:*
   - *Pour tout $x \neq 0$, $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto e^x$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$; donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$*
   - *Pour $x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$*

     Donc f est continue en 0

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$
3. *Si on pose $X = \frac{1}{x}$, on trouve que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{X \to \pm\infty} 2X^3 e^{-X^2} = 0$ Alors $f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0 donc f est dérivable et que $f'(x) = 0$*
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$

Exercice 4 $(2pts + 2pts)$

On calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1'(x) = \frac{\cos x}{3 + \sin(x)}$
2. $f_2'(x) = \frac{x}{1 + x^2}$