امتحان في مقياس الرياضيات 3

السنة الثالثة ST

التمرين 01 (6points)

Calculer l'intégrale généralisée et déduire sa nature احسب التكامل المعمم ثم استنتج طبيعته.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Etudier la nature des intégrales généralisées ادرس طبيعة التكاملات المعممة الآتية:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x}{x^3+3x+1}\,dx \;;\; I_3 = \int_2^3 \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}}\,dx \;;\; I_4 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

التمرين 02 (7 points)

Soit *f* une fonction impaire 2π périodique : لتكن f دالة فردية 2π دورية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & ; \; x \in [0, \pi] \\ \frac{-\pi}{2} - \frac{x}{2} & ; \; x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

1- Dessiner la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$ ارسم منحنى f على $[-\pi, \pi]$

2-Donner la série de Fourier associée à *f* عين سلسلة Fourier الملحقة بـ f

3- Vérifier les conditions de Dirichlet تحقق من شروط Dirichlet

4- Déduire la somme de la série de Fourier استنتج مجموع سلسلة Fourier

5- calculer les sommes احسب المجاميع

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} \;;\; \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} \;;\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

التمرين 03 7 points

1 - Calculer :

$L^{-1}\left(\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}\right)$ *et résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} y'' - \frac{5}{2}y' + y = \frac{-5}{2}\sin t \\ y(0) = 0 \;;\; y'(0) = 2 \end{cases}$$

2- Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante (b une constante > 0)

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & ; \quad t \in [-b, +b] \\ 0 & ; \quad t \in]-\infty, -b[\cup]b, +\infty[\end{cases}$$

Exo1 (6pts) Corrigé type Contrôle 2018-2019

Exercice 01 : $I_1 = 1,25$

$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

f معرفة و مستمرة على

$f \in Loc[1,+\infty[$ 0,25 $\Leftarrow$ $[1,+\infty[$

$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty} \underbrace{(x^2+1)^{-2}}_{g} \underbrace{2x}_{g'}\,dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_1^{\infty}$ 0,5

$= \frac{-1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 0,25

0,25 I_1 متقارب

$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x}{x^3+3x+1}\,dx$

f معرفة و مستمرة على

0,25 $f \in Loc[0,+\infty[$ $\Leftarrow$ $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[: f(x) \geq 0$ 0,25

نطبق التكافؤ او قاعدة Riemann.

$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) =$ 0,25

$= \lim_{x\to+\infty} x \frac{x^2+5x}{x^3+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ 0,25

$\alpha = 1 \leq 1$; $k = 1 \neq 0 \Rightarrow$ 0,25

متباعد . تكامل

0,25

$\boxed{I_2 = 1,5}$

Page 1

$I_3 = \int_2^3 \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}}\,dx$ $\boxed{I_3 = 1,5}$

f معرفة و مستمرة على $]2,3]$

$\Leftarrow$ $f \in Loc\,]2,3]$ 0,25

$\forall x \in]2,3] : f(x) > 0$ 0,25

نطبق قاعدة R

$\lim_{x \to 2^>} (x-2)^{\alpha} f(x)$ 0,25

$\lim_{x \to 2^>} (x-2)^{1/3} \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}} = \frac{1}{5}$ 0,25

$\alpha = \frac{1}{3} < 1$; $k = \frac{1}{5} \neq \infty \Rightarrow$ 0,25

0,25 I_2 متقارب

$I_4 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$ $\boxed{I_4 = 1,75}$

0,25

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = \frac{-1}{y^2}dy$

$x \to 0 \Rightarrow y \to +\infty$ 0,25

$x \to 1 \Rightarrow y \to 1$

$I = \int_{+\infty}^{1} \cos y \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$

$= -\int_{+\infty}^{1} \cos y \left(\frac{1}{y^2}\right) dy$

$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} \cos y\,dy$ 0,5 pts

ABEL.

$f(y) = \frac{1}{y^2}$.

$f \in Loc[1, +\infty[$.

$f(y) > 0 \quad \forall y \in [1, +\infty[$ (0,5)

$\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = 0$

$f'(y) = \frac{-1}{y^2} < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty[$.

$g \in Loc[1, +\infty[$.

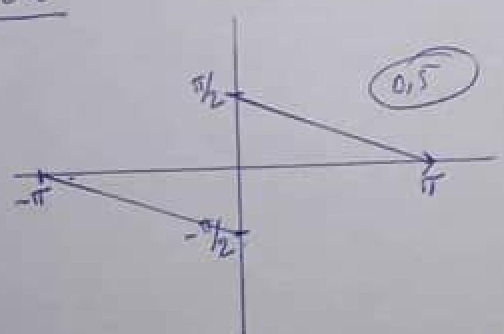
$\int_1^y g(t)\,dt = \int_1^y \cos t\,dt$ (0,5)

$\sin t\Big]_1^y = \sin y - \sin 1$

$|\sin y - \sin 1| \leq 2 = M$.

D'Après ABEL l'int est conv (0,25)

Ex 02



$T = 2\pi$ f فردية

(0,5) $a_n = a_0 = 0$. $\omega = 1$

$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(nx)\,dx$. (0,25)

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \sin(nx)\,dx$.

$u = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ (0,25) $u' = \frac{-1}{2}$.

$v' = \sin(nx)$ $\quad v = \frac{-1}{n}\cos(nx)$

$b_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{-1}{n}\cos nx\right) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2n} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx}_{0} \right.$

(0,25) (0,25)

$b_n = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{-1}{n}\cos 0\right)\right)$

$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$. (0,5)

$\boxed{b_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1}$

س فورييه

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx)$ (0,25)

شروط Dirichlet

من الرسم على $[-\pi, +\pi]$

f لا يقبل مستقيمات مقاربة

(0,5) ~~و~~ عمودية ولا

مماسات عمودية

f من الصنف C^1 بتقطع

من أجل f مستمرة عند x (0,25)

(0,25)

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nx) = f(x)$.

$x = 1$ ~~...~~
(0,25)

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin n = f(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

(0,25) (0,25)

lité de parseval

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f^2(x)\,dx$$ 0,5

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f^2(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

0,25

$$= \frac{2}{\pi}(-2)\int_0^{\pi}\underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)}_{f'}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)^2}_{f^{\alpha}} dx$$

$$= \frac{-4}{\pi}\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{-4}{\pi 3}\left[0-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right]$$

0,25 0,25

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ 0,25

Exo 3. (4,5 points)

$$\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{bs+c}{s^2+1}$$

$$2s+1 = s^2(a+b) + s(c-2b) + a - 2c$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c-2b=2 \\ a-2c=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{matrix}$$ 1

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$ 0,25

$$= e^{2t} - \cos t$$ 0,5

page 3

$$\mathcal{L}(y) = Y(s)$$

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0) = sY(s)$$ 0,75

$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$= s^2Y(s) - 2$$

$$\mathcal{L}\left(y'' - \frac{5}{2}y' + y\right) = \frac{-5}{2}\mathcal{L}(\sin t)$$

$$\mathcal{L}(y'') - \frac{5}{2}\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \frac{-5}{2}\frac{1}{s^2+1}$$ 0,25 0,25

$$s^2Y(s) - 2 - \frac{5}{2}sY(s) + Y(s) = \frac{-5}{2}\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(s^2 - \frac{5}{2}s + 1\right) = \frac{-5}{2(s^2+1)} + 2$$

$$= \frac{4s^2-1}{2(s^2+1)}$$ 0,5

$$Y(s) = \frac{4s^2-1}{2(s^2+1)\left(s^2-\frac{5}{2}s+1\right)}$$ 0,25

$$s^2 - \frac{5}{2}s + 1 = (s-2)\left(s-\frac{1}{2}\right)$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{(2s-1)}(2s+1)}{(s^2+1)(s-2)\cancel{(2s-1)}}$$ 0,25

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s^2+1)(s-2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$$ 0,25

$$= e^{2t} - \cos t.$$

0,25

② 2,5 points

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & t \in [-b, +b] \\ 0 & t \notin [-b, +b] \end{cases}$$

$$\hat{y}(s) = f(y(t)) = \int_{\mathbb{R}} y(t) e^{-its} dt \quad 0{,}5$$

$$= \int_{-\infty}^{-b} \underbrace{y(t)}_{\to 0} e^{-its} dt + \int_{-b}^{+b} y(t) e^{-its} dt$$

$$+ \int_{b}^{+\infty} \underbrace{y(t)}_{\to 0} e^{-its} dt$$

$$= \int_{-b}^{b} \frac{1}{2b} e^{-its} dt \quad 0{,}25$$

$$\boxed{s \neq 0 \quad 0{,}25}$$

$$= \frac{1}{2b} \frac{1}{-is} \left[e^{-its} \right]_{-b}^{+b}$$

$$= \frac{1}{2b} \left(\frac{1}{-is} \left(e^{-ibs} - e^{+ibs} \right) \right) \quad 0{,}25$$

$$= \frac{1}{bs} \left[\frac{e^{i(bs)} - e^{-i(bs)}}{2i} \right] \quad 0{,}25$$

$$= \frac{\sin(bs)}{bs} \quad 0{,}5$$

pour $s = 0$. $\quad 0{,}5$

$$f(y(t)) = \hat{y}(0) = 1.$$

$$\hat{y}(s) = \begin{cases} \frac{\sin(bs)}{bs} & s \neq 0 \\ 1 & s = 0 \end{cases}$$

page 4

Suite de l'exo 2.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$$

$$x = \frac{\pi}{2}. \quad 0{,}25$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad 0{,}25$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1. \end{cases} \quad 0{,}25$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4} \quad 0{,}25$$