جامعة العربي بن امهيدي ام البواقي

كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة و الحياة

الامتحان الأول في مادة الجبر 1

التمرين الأول : (5 ن) (اسئلة المحاضرة)

1) اجر عملية القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على كثير الحدود B حيث : $A=x^4-2x^3+x^2-5x+1$ و $B=x^2+x+4$.
2) حدد تعدد الجذر 2 في كثير الحدود $P(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$.
3) هل $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\dot{+},\times)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ لها بنية حقل؟ برر بإجابتين مختلفتين لكل بنية .

التمرين الثاني: (5 ن) ليكن التطبيق f المعرف ب :

$$f \quad :\mathbb{R}\to \quad \mathbb{R}$$

$$x\mapsto f(x)=x(x+2)$$

1) عين $f(\{0\}),f(\{-2\}),f^{-1}(\{1\}),f^{-1}(\{-2\})\ f^{-1}(\{-1\})$
2) استنتج إن كان f متباينا ؟ غامرا ؟
3) لتكن X و Y مجموعتان جزئيتان من $\mathbb{R}$ ، عين المجموعتان X و Y حتى يكون التطبيق $f_1: X\to Y$ (اقتصار f) تقابليا .

التمرين الثالث: (5 ن) نعرف على $\mathbb{R}$ قانون التركيب $*$ كما يلي :

$$\forall a, b\in\mathbb{R}, a*b=\ln(e^a + e^b).$$

1) تحقق من أن $*$ قانون تركيب داخلي على $\mathbb{R}$.
2) هل $*$ تبديلي ؟ تجميعي ؟ يقبل عنصر حيادي ؟
3) عين العناصر التي تقبل نظائر؟ عين العناصر المنتظمة؟
4) استنتج إن كانت $(\mathbb{R}, *)$ لها بنية زمرة.

التمرين الرابع : (5 ن) ليكن

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 , x+y \text{ زوجي}\}$$

1) بين ان H زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}^2, +)$.
2) بين أن التطبيق

$$\varphi: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H$$
$$(x,y)\longmapsto (x, 2y-x)$$

هو اومومورفيزم زمر .

3) احسب $\ker\varphi$ ، $\mathrm{Im}\varphi$.
4) هل φ ايزومورفيزم زمر؟

Université L'arbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi Le 13-01-2019

Faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie

$1^{ère}$ année LMD Matière : ALGEBRE 1

Controle $N^0 1$

Exercise 1 '*(5 pts) (Questions de cours) les questions de cet exercice sont indépendants*

1) Soient A et B deux polynômes; effectuer la division euclidienne de A par B :

$$A = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1 \qquad , \; B = x^2 + x + 4.$$

2) Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.

3) Est ce que $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ ont une structures d'un corps? justifier avec deux réponces différentes pour chaqu'un.

Exercise 2 *(5 pts) On considère l'application f définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(x+2) \end{aligned}$$

1) Déterminer $f(\{0\})$, $f(\{-2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-2\})$ $f^{-1}(\{-1\})$, (f^{-1}: l'image réciproque)

2) Déduire si f est injective, surjective?

3) Soient X et Y deux sous ensembles de $\mathbb{R}$,

- Determiner les sous ensembles X et Y pour que la restriction $f_1 : X \longrightarrow Y$ de f devienne bijective.

Exercise 3 *(5 pts) On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par :*

$$\forall a,\, b \in \mathbb{R},\; a * b = \ln\left(e^a + e^b\right).$$

1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.

2) La loi $*$ est-elle commutative? associative? $*$ Possède-t-elle un élément neutre ?

3) Déterminer les éléments symetrisables sils existes ? Déterminer les éléments réguliers ?

4) Déduire si $(\mathbb{R}, *)$ a une structure de groupe?

Exercise 4 *(5 pts) Soit*

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2;\; x + y \text{ est pair}\right\}$$

1) Montrer que H est un sous-groupe de $\left(\mathbb{Z}^2, +\right)$.

2) Montrer que l'application $\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longmapsto (x, 2y - x) \end{aligned}$

est un homorphisme de groupes.

3) Calculer $\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$.

4) φ est elle bijective? Que t-on dire sur φ