Corrigé de l'examen de Topologie (S_3)

$2^{\text{ème}}$ Année Maths LMD (15/01/2019)

Exercice n° 01 (08pts) :

1/ a) $\phi \in \mathcal{T}$, $\mathbb{N} = A_0 \in \mathcal{T}$ (0,50pt)

b) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m \Rightarrow A_m \subset A_n$ donc $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{T}$

où $i_0 = \min I$ (I quelconque). (01,50pt)

c) $\bigcap_{j \in J} A_j = A_{j_0} \in \mathcal{T}$ où $j_0 = \max J$ (J fini) (01,50pt)

2/ $F = \{\phi, \mathbb{N}\} \cup \{\{0, 1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N}\}$ (01pt)

3/ $\mathcal{V}(m) = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ / $m \in \mathbb{N}$. (01pt)

4) $\mathring{A} = \phi$ ($\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A) (01pt)

5/ Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \in \overline{B} \Leftrightarrow \forall p \leq m : A_p \cap B \neq \phi$ (01,50pt)

donc $\overline{B} = \mathbb{N}$ i.e B est partout dense dans $\mathbb{N}$.

Exercice n° 02 (06pts) :

1/ f dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\sup_{x \in]0,+\infty[} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ donc $\forall x, y \in]0, +\infty[$:

$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, alors f est contractante. (02pts)

2) D'après théorème de point fixe ($]0, +\infty[$ complet et f contractante) alors f admet un point fixe unique a. (01pt)

3/ $f(a) = a \Leftrightarrow \sqrt{1+a} = a \Leftrightarrow a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin]0, +\infty[\\ a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in]0, +\infty[\end{cases}$

donc $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ point fixe unique (01pt)

4) $x_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} = f(x_n)$

D'après théorème du pt fixe - Banach 1922.

$f :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ Contractante avec $]0,+\infty[$ Complet

alors il existe un pt fixe $a \in]0,+\infty[$ tel que $f(a) = a$. De p

Si $x_0 \in]0,+\infty[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ alors $a = \lim_{n \to \infty} x_n$ et

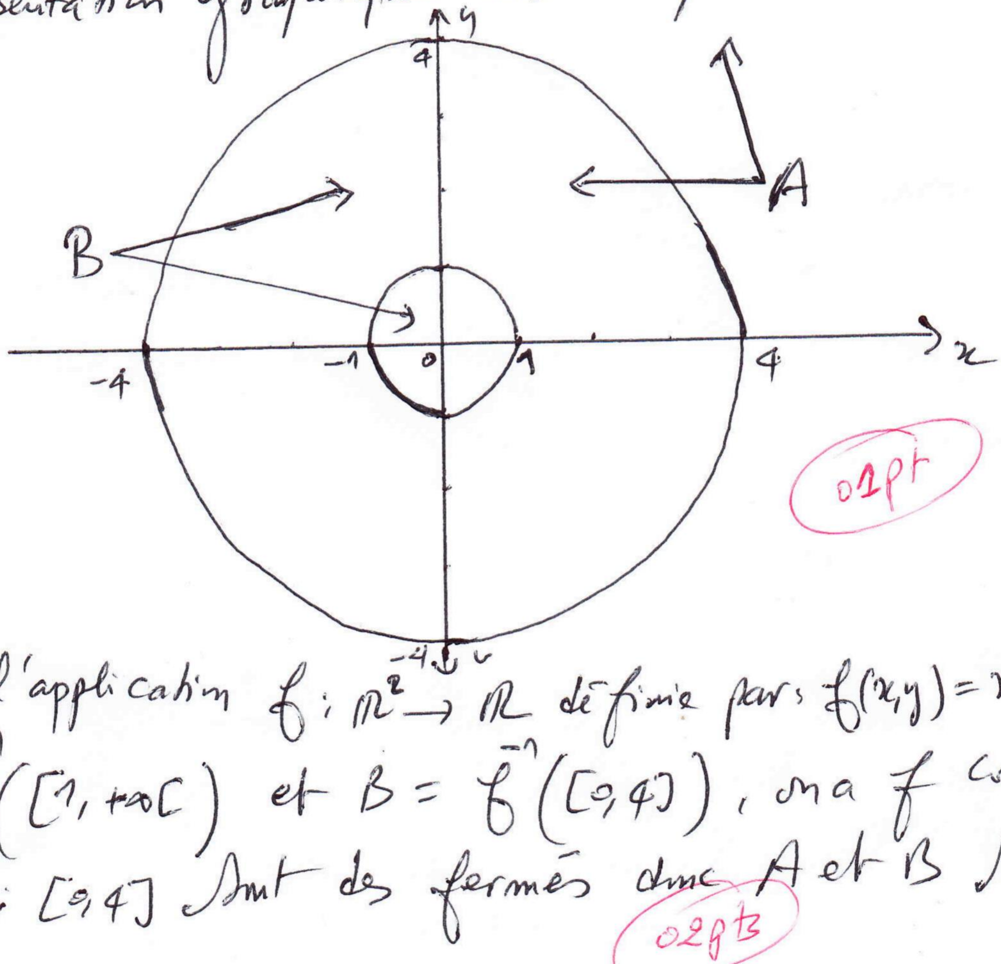
$$d(a, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)) \quad \text{où } k = \frac{1}{2} \text{ et } x_0 = 1.$$

donc $(x_n)_n$ est de Cauchy.

02pts

Exercice n° 03 (06pts) :

1) Représentation graphique dans le plan $\mathbb{R}^2$.



01pt

2) Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 + y^2$

$A = f^{-1}([1,+\infty[)$ et $B = f^{-1}([0,4])$, on a f continue et

$[1,+\infty[$; $[0,4]$ sont des fermés donc A et B sont des fermés.

02pts

3) $C = A \cap B$ donc C est fermé
$C \subset \overline{B}(0,2)$ donc C est bornée
$\Big\}$ alors C est Compact

02pts

4) A n'est pas bornée alors A n'est pas Compact

01pt

FIN