UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI | DEPARTEMENT : MI | ANNEE AC. : 2018/2019

Examen final du module Distributions II | Date : 19/01/2019 | Durée : 1h30

Exercice 1 (4,5 points).

Soit $\Omega = \mathbb{R} \times]0,1[$, $(p,r) \in [1,\infty[\times \mathbb{R}$ et soit $v(x_1,x_2) = (1+x_1^2)^r \ \ \forall(x_1,x_2) \in \Omega$.

1) Démontrer que :

1.1) $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^p(\Omega)}$,

1.2) $\{\nabla u; u \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$ est fermé dans $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$.

2) Étudier l'appartenance de v à $W^{1,p}(\Omega)$ et à $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 2 (4 points).

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall(u,v) \in W^{k,4}(\mathbb{R}^n) \times W^{k,4}(\mathbb{R}^n)$, $uv \in W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$.

2) Démontrer que $W^{2,4}(\mathbb{R}^3) \subset C_0(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 3 (11,5 points).

Soit $(k,p,s) \in \mathbb{N} \times]1,\infty[\times \mathbb{R}$ et soit $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante.

1) Démontrer que :

1.1) si $u \in W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $(\theta_j * u)_{j\in\mathbb{N}} \subset W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to u$ dans $W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$,

1.2) si $u \in S(\mathbb{R}^n)$, alors $(\theta_j * u)_{j\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to u$ dans $S(\mathbb{R}^n)$,

1.3) si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, alors $(\theta_j * u)_{j\in\mathbb{N}} \subset S'(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to u$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$,

1.4) si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $(\theta_j * u)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to u$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2) Étudier la convergence de $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

3) Étudier la bornitude de $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Bon succès