USTHB 2017-2018 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Série d'exercices n° 1 : Généralités sur les équations différentielles

Exercice 1 :

Trouver les équations différentielles qui ont pour solution générale les fonctions $y = f(t)$ données ci-dessous, α, β et γ étant des constantes.

a) $y = \alpha t$ **b)** $y = \alpha e^t$ **c)** $y = \sin(t + \alpha)$

d) $y = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta$ **e)** $y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ **f)** $t^2 y^3 + t^3 y^5 = \alpha$.

Exercice 2 :

Montrer que si dans l'équation d'ordre n

$$F\left(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0,$$

la variable t n'entre pas explicitement, alors son ordre peut etre rabaissé d'une unité à l'aide du changement de variable et de fonction $y' = v(y)$ où v est la nouvelle fonction inconnue.

Exercice 3 :

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre

a) $y' + y - t = 0$ **b)** $y'' - y' = 2y$ **c)** $y''' + ty - 2y = \sin t$

d) $(2 - y)\, y' + y = \ln t$ **e)** $y'' + \sin y = 1$ **f)** $y^{(5)} + y^2 = t$.

Exercice 4 :

À l'aide du changement de variables ou de dérivation, ramener les équations suivantes sous forme linéaire

a) $t = (y^2 - 2y + 1)\, y'$ **b)** $(t + 1)(yy' - 1) = y^2$

c) $y(t) = \int_0^t y(s)\, ds + t + 1$ **d)** $\int_0^t (t - s)\, y(s)\, ds = 2t + \int_0^t y(s)\, ds$.

Exercice 5 :

Montrer que $y = 2t + \lambda e^t$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 2(1 - t)$ et trouver la solution particulière dont la courbe intégrale passe par le point $t = 0, y = 3$.

Exercice 6 :

Àl'aide du changement de fonctions $z = y, w = y'$, transformer l'équation différentielle

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$$

à un système d'équations du premier ordre.