USTHB 2017-2018 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
$3^{\text{ème}}$ année LAC

Série d'exercices n° 2 : Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 : *(Variables séparées)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = y^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, **b)** $y' = (1-y)\,y$, **c)** $y' = \operatorname{tg}(t)\,y,\ y(0) = 1$,

d) $y' = \frac{\pi}{4}\cos(t)\left(1+y^2\right)$, **e)** $y' = t\sqrt{1-y^2}$, **f)** $t^3 y' \sin y = 2,\ \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}$,

g) $y'\sqrt{1-t^2} + ty = 0$, **h)** $\left(1-y^2\right)y' = y$, **I)** $ty' + y\operatorname{Log} y = 0,\ y(1) = 1$.

Exercice 2 : *(Équations type-homogènes)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $4yy' + t = 0$, **b)** $(t-y)\,y' + 2t + 3y = 0$, **c)** $t^2 y' = y^2$,

d) $ty' = y - t$, **e)** $ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2}$, **f)** $ty' = y + t\cos^2 \frac{y}{t}$.

Exercice 3 : *(Équations aux différentielles totales, facteur intégrant)*

Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $\left(t^2 y + y^3\right)y' + t^3 + ty^2 = 0$, **b)** $y\left(t^2 + 2y^2\right)y' + t\left(2t^2 + y^2\right) = 0$,

c) $2tyy' = t + y^2,\ \mu(t,y) = \varphi(t)$ **d)** $\left(t + 4ty + 5y^2\right)y' + 3t + 2y + y^2,\ \mu(t,y) = \varphi\left(t + y^2\right)$.

Exercice 4 : *(Équations différentielles linéaires)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y = \cos t$, **b)** $y' + 2ty = 4t$, **c)** $y' - y = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$,

d) $y' - 2ty = 2te^{t^2}$, **e)** $(t-2)\,y' = y + 2\,(t-2)^2$, **f)** $\left(1+t^2\right)y' = 2ty + 5\left(1+t^2\right)$,

g) $y' + y = e^{-t},\ y(0) = 0$, **h)** $2ty' + y = 1,\ y(1) = 2$, **I)** $y'\cos t - y\sin t = 2t,\ y(0) = 0$.

Exercice 5 : *(Équations de Bernoulli, Ricatti et Lagrange)*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = y - \sqrt{y}$, **c)** $y' = y^2 + ty + 1$, **e)** $y = ty' - (y')^3$,

b) $\left(t^3+1\right)y' = 3t^2 y - ty^3$, **d)** $\left(t^3-1\right)y' = y^2 + t^2 y - 2t$, **f)** $y = t\,(1+y') - (y')^2$.

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - \left(2t - \dfrac{1}{t}\right) y = 1,$ **c)** $y' - y = t^k e^t, k \in \mathbb{N},$ **c)** $t\left(1 + \mathrm{Log}^2 t\right) y' + 2\left(\mathrm{Log}\, t\right) y = 1,$

d) $ty' + y - ty^3 = 0,$ **e)** $t^2\left(y^2 + y'\right) = ty - 1,$ **f)** $t^2 y' = t^2 y^2 + ty + 1,$

g) $y = \frac{3}{2} t y' + e^{y'},$ **h)** $y = \left(y' - 1\right) e^{y'},$ **i)** $ty' = t^2 + y,$

j) $\left(t^3 + e^y\right) y' = 3t^2,$ **k)** $ty' = y - t,$ **l)** $y' \sin t = y\, \mathrm{Log}\, y.$

Exercice 7 :

Déterminer, sans résoudre l'équation, le lieu des extrema des solutions de $y' = ty - 1$.

Dans quelle région du plan sont-elles croissantes, décroissantes ?

Exercice 8 :

On considère la famille de courbes (C_λ) d'équation générale $t^2 + 3y^2 - 3 = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Préciser la nature des courbes (C_λ).

b) Déterminer l'équation différentielle pour cette famille.

c) En déduire l'équation différentielle de la famille de courbes orthogonales puis l'équation générale de ces courbes.

Exercice 9 :

Montrer que la substitution $y = \dfrac{s}{t}$ réduit l'équation différentielle $(1 - ty)\, y = t\,(1 + ty)\, y'$ à une équation à variables séparables. Résoudre cette équation.

Exercice 10 : *(Dynamique des populations)*

On s'intéresse à l'évolution d'une population. Soient $y(t)$ le nombre d'individus de cette population et $k(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$ le taux de croissance de cette population au temps t. Étudier l'évolution de cette population au cours du temps dans les cas suivants :

a) k est constant.

b) $k = y$. Montrer alors que la solution explose en temps fini.

c) $k = a - by$. Montrer que y converge.