Chapitre 3

Équations différentielles du second ordre

Sommaire

La forme générale d'une équation différentielle du second ordre est $F(t, y, y', y'') = 0$. Sa forme normale ou résolue s'écrit $y'' = f(t, y, y')$. Il existe très peu de cas où on sait résoudre explicitement une équation du second ordre : même les équations linéaires du second ordre sans second membre ne se résolvent pas explicitement en général.
La solution générale y dépend en général de deux paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui apparaissent le plus souvent comme des constantes d'intégration.

3.1 Équations différentielles du second ordre incomplètes

Ces équations se ramènent à des équations du premier ordre.

3.1.1 Équations du type $y'' = f(t, y')$

Si on considère la nouvelle fonction inconnue $v = y'$, l'équation $y'' = f(t, y')$ se ramène à l'équation du premier ordre $v' = f(t, v)$. La solution générale de cette dernière sera de la forme $v_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on obtient donc $y(t) = \int v_\lambda(t)\, dt + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 40
Cherchons les solutions de l'équation $y'' = \frac{1}{t} y' + 3t$.
Posons $v = y'$ et remplaçons dans notre équation, on obtient $v' = \frac{1}{t} v + 3t$. En utilisant la méthode de variation de la constante on trouve $v(t) = 3t^2 + \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il vient $y(t) = t^3 + \lambda t^2 + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

3.1.2 Équations du type $y'' = f(y, y')$

La méthode consiste à prendre y comme nouvelle variable et $v = y'$ comme variable fonction inconnue en la variable y, c'est-à-dire $v : y \mapsto v(y) = y'$.

Il peut y avoir des solutions constantes $y(t) = y_0$, auquel cas y ne peut être choisi comme variable. On a donc des solutions singulières $y(t) = y_j$ avec $f(y_j, 0) = 0$.

Dans le cas général, on a $y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v$.
L'équation $y'' = f(y, y')$ se ramène alors à l'équation du premier ordre $v \frac{dv}{dy} = f(y, v)$. La

résolution de cette dernière donne une solution générale $v_\lambda(y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit ensuite résoudre $y' = v_\lambda(y)$ ou $\frac{dy}{v_\lambda(y)} = dt$. D'où la solution générale

$$\int \frac{dy}{v_\lambda(y)} = t + \mu, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 41

Cherchons les solutions de l'équation $y'' = 2yy'$.

Par le changement de fonction $v(y) = y'$, on a $y'' = v\frac{dv}{dy} = 2yv$ qui est une équation à variables séparées de fonction inconnue $v(y)$ ayant pour solution $v = y^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Ensuite, en résolvant l'équation $y' = y^2 + \lambda$, qui est une équation de Riccati, on trouve $y(t) = \lambda \operatorname{tg}(\lambda t + \mu)$ et $y(t) = -\lambda \coth(\lambda t + \mu)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De plus $y = \lambda$ sont des solutions singulières. ▪

3.1.3 Équations du type $y'' = f(y)$

C'est un cas particulier du cas précédent, mais on peut ici préciser davantage la méthode de résolution. On a en effet $y'y'' = y'f(y)$, et en intégrant il vient $\frac{1}{2}(y')^2 = \varphi(y) + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$, où φ est une primitive de f. On obtient donc

$$y' = \pm\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)} \ \text{ ou } \ \frac{dy}{\pm\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}} = dt,$$

d'où la solution générale est sous forme

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{2(\varphi(y) + \lambda)}} = t + \mu, \ \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 42

On considère l'équation $y'' = 2e^y$.

En multipliant par y' on a $y'y'' = 2y'e^y$, et donc en intégrant il vient $\frac{1}{2}(y')^2 = 2e^y + \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$y' = \pm\sqrt{4e^y + 2\lambda}, \ \text{ ou } \ \frac{dy}{\pm\sqrt{4e^y + 2\lambda}} = dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

En intégrant et après simplification on obtient

$$y(t) = 2\operatorname{Log}\left(\frac{\lambda}{\cos(\lambda t + \mu)}\right), \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$ ▪

3.2 Équations différentielles type-homogènes du second ordre

Ce sont les équations différentielles qui peuvent se mettre sous la forme

$$F\left(t, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0. \tag{3.1}$$

La résolution de ces équations se fait en effectuant un changement de fonction inconnue en posant $u(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$, et donc $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$. On est alors ramené à une équation différentielle du premier ordre $F(t, u, u' + u^2) = 0$.

Exemple 43

Soit l'équation $yy'' - (y')^2 + 6ty^2 = 0$.

On peut écrire cette équation sous la forme $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 6t = 0$ soit $F\left(t, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right) = 0$ avec $F(t, z, w) = w - z^2 + 6t$.

On effectue un changement de fonction inconnue en posant $u = \dfrac{y'}{y}$. D'où $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2$ et donc l'équation $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + 6t = 0$ devient $u' + 6t = 0$. D'où $u = -3t^2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\dfrac{y'}{y} = -3t^2 + \lambda$ qui est une équation différentielle du premier ordre ayant pour solution générale $y = \mu e^{-t^3 + \lambda t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ▪

3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)\,. \tag{3.2}$$

Définition 24 (Solutions indépendantes)

Deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (3.2) sont indépendantes sur un intervalle I s'il n'existe pas de réel k tel que pour tout $t \in I$: $y_2(t) = ky_1(t)$.

Remarque 25

Les fonctions y_1 et y_2 sont indépendantes cela signifie linéairement indépendantes au sens des espaces vectoriels.

Définition 26 (Wronskien)

Soient deux fonctions dérivables $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ sur un intervalle I.

Le *wronskien* de ces deux fonctions est défini à l'aide d'un déterminant

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)\, y_2'(t) - y_1'(t)\, y_2(t).$$

Les deux fonctions dérivables $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si leur wronskien $W(y_1, y_2)$ n'est pas identiquement nul.

Exemple 44

Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto e^t$ sont indépendantes.

Les fonctions $f : t \mapsto 3e^{-t} \sin t$ et $g : t \mapsto 5e^{-t} \sin t$ ne le sont pas puisque $g = \frac{5}{3} f$. ▪

3.3.1 Équations linéaires homogènes du second ordre

Si $c(t) \equiv 0$ on dit que l'équation (3.2) est linéaire homogène ou sans second membre

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0. \tag{3.3}$$

Cas où l'on connaît deux solutions particulières indépendantes :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$, alors la solution générale de cette équation différentielle est $y = \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda$ et μ étant des constantes arbitraires.

Exemple 45

Pour l'équation différentielle homogène $t^2 y'' - 2y = 0$, en cherchant des solutions sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = \frac{1}{t}$ sont des solutions particulières. D'après la propriété ci-dessus, on peut en déduire que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $y(t) = \lambda t^2 + \dfrac{\mu}{t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ▪

Cas où l'on connaît une solution particulière :

Considérons l'équation différentielle homogène $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ pour laquelle on connaît une solution particulière y_1.

La méthode pour trouver la solution générale consiste à effectuer un changement de fonction en posant $y(t) = y_1(t)\, v(t)$, où v étant la nouvelle fonction inconnue. Il vient

$$y_1''v + 2y_1'v' + v''y_1 + a(t)(y_1'v + y_1v') + b(t)\, y_1v = 0.$$

Comme y_1 est solution de notre équation différentielle, alors on obtient

$$y_1v'' + (2y_1' + a(t)\, y_1)\, v' = 0.$$

La fonction $w = v'$ est donc solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui se peut se réécrire

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} - a(t)\,.$$

La solution générale est donnée par $w(t) = \lambda (y_1(t))^{-2}\, e^{-\int a(t)dt}, \lambda \in \mathbb{R}$.
D'où $v(t) = \displaystyle\int w(t)\, dt + \mu,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution générale de $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est donc

$$y(t) = y_1(t) \int w(t)\, dt + \mu y_1(t)\, , \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 46

Considérons l'équation $(t+1)\, y'' - (2t-1)\, y' + (t-2)\, y = 0$.
On peut vérifier que $y_1(t) = e^t$ est une solution particulière.
Cherchons la solution générale sous la forme $y(t) = e^t v(t)$, alors

$$(t+1)\left(e^t v + 2e^t v' + v''e^t\right) - (2t-1)\left(e^t v + e^t v'\right) + (t-2)\, e^t v = 0.$$

Apres simplification, on trouve $(t+1)\, v'' = -3v'$. En posant $w = v'$, on a $(t+1)\, w' = -3w$ équation différentielle du premier ordre ayant pour solution $w(t) = \frac{\lambda}{(t+1)^3}$. D'où

$$v(t) = \int w(t)\, dt + \mu = \frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de notre équation différentielle est donc

$$y(t) = \left(\frac{\lambda}{(t+1)^2} + \mu\right) e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad ■$$

3.3.2 Équations linéaires non homogènes du second ordre

Si $c(t) \neq 0$ on dit que l'équation $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ est linéaire non homogène ou avec second membre. L'équation $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est l'équation homogène associée.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, la solution générale de l'équation non homogène $y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)$ est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Variations des constantes :

Supposons qu'on connaisse la solution générale $y = \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + a(t) y' + b(t) y = 0$. On peut alors chercher la solution générale par la méthode de variation des constantes.

Le principe de cette méthode est de considérer λ et μ comme fonctions de la variable t. Cherchons la solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t) y_1(t) + \mu(t) y_2(t)$. En reportant cette fonction dans l'équation non homogène, on a après simplification

$$2\lambda' y_1' + 2\mu' y_2' + \lambda'' y_1 + \mu'' y_2 + a(t)(\lambda' y_1 + \mu' y_2) = c(t).$$

En imposant la condition supplémentaire $\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0$, on voit que $\lambda'' y_1 + \mu'' y_2 = -(\lambda' y_1' + \mu' y_2')$ et donc les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t). \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient

$$\lambda' = \frac{-c(t) y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2}, \quad \mu' = \frac{c(t) y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène $y'' + a(t) y' + b(t) y = c(t)$ est

$$y = y_1 \int \frac{-c(t) y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2 \int \frac{c(t) y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 47

Considérons l'équation $y'' - \frac{2}{t^2} y = te^t$. En cherchant des solutions pour l'équation homogène $y'' - \frac{2}{t^2} y == 0$ sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, on trouve que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = \frac{1}{t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. D'où la solution générale de l'équation homogène est de la forme $y(t) = \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On va donc chercher la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $y(t) = t^2 \lambda(t) + \frac{\mu(t)}{t}$. Les dérivées λ' et μ' doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c(t), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t^2 \lambda' + \dfrac{\mu'}{t} = 0, \\ 2t\lambda' - \dfrac{\mu'}{t^2} = te^t. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda' = \frac{1}{3} e^t, \mu' = \frac{-1}{3} t^3 e^t$ et donc

$$\lambda(t) = \frac{1}{3} e^t + \alpha, \quad \mu(t) = \frac{1}{3} e^t \left(-t^3 + 3t^2 - 6t + 6\right) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = e^t \left(t - 2 + \frac{2}{t}\right) + \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

3.4 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, est une équation du type

$$y'' + ay' + by = c\,(t)\,,$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $t \mapsto c(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Comme dans le cas à coefficients non constants, on commence par résoudre l'équation homogène associée ou sans second membre

$$y'' + ay' + by = 0.$$

On cherche des solutions sous la forme $y = e^{rt}, r \in \mathbb{R}$. En substituant dans notre équation homogène, on obtient

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rt} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut que

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation se nomme l'équation *caractéristique* (ou auxiliaire) associée à notre équation homogène. Les valeurs de r se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, ce qui montre que les fonctions $y_1 = e^{r_1 t}$ et $y_2 = e^{r_2 t}$ sont deux solutions particulières indépendantes. La solution générale de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ sera alors

$$y_h = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0. Dans ce cas, l'obtention d'une solution réelle r_0 montre que la fonction $y_1 = e^{r_0 t}$ est une solution particulière, d'autre part on peut montrer que $y_2 = te^{r_0 t}$ est aussi solution. On en déduit alors que la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y_h = (\lambda t + \mu)\, e^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2-4b<0$ on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de forme générale $r_1=\alpha-i\beta$ et $r_2=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Alors $y_1=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $y_2=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sont deux solutions particulières indépendantes de l'équation homogène. D'où la solution homogène générale est

$$y_h=e^{\alpha t}\left(\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)\right),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$y_h=\lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t+\mu)\quad \text{ou } y_h=\lambda e^{\alpha t}\sin(\beta t+\mu),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exemple 48

a) $y''+4y'+3y=0$.

L'équation caractéristique est $r^2+4r+3=0$, on a $r_1=-3, r_2=-1$. Alors la solution générale est $y=\lambda e^{-3t}+\mu e^{-t}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

b) $y''+4y'+9y=0$.

b) L'équation caractéristique est $r^2+4r+9=0$, on a $r_1=-2-i\sqrt{5}, r_2=-2+i\sqrt{5}$. Alors la solution générale est $y=e^{-2t}\left(\lambda\cos\left(\sqrt{5}t\right)+\mu\sin\left(\sqrt{5}t\right)\right)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

c) $y''+6y'+9y=0$.

c) L'équation caractéristique est $r^2+6r+9=0$, on a $r_1=-3$ une racine double. Alors la solution générale est $y=(\lambda t+\mu)e^{-3t}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. ■

Ensuite, il faut trouver une solution particulière y_p de l'équation avec le second membre

$$y''+ay'+by=c(t).$$

La solution générale sera $y=y_p+y_h$.

3.4.1 Recherche d'une solution particulière pour des seconds membres spécifiques

Dans la pratique, c'est la forme de la fonction $c(t)$ qui nous indiquera sous quelle forme chercher la solution particulière.

- Si $c(t)=p(t)$ est un polynôme de degré n :

Chercher une solution $q(t)$ qui soit un polynôme de degré n si $b\neq 0$, de degré $n+1$ si $b=0$ et $a\neq 0$, et de degré $n+2$ si $a=0$ et $b=0$.

Exemple 49

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = 2t^2$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines -1 et 2. La solution générale de l'équation homogène associée est donc $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré $y_p = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On a $y_p' = 2\alpha t + \beta, y_p'' = 2\alpha$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve : $-2\alpha t^2 - 2(\alpha + \beta)t + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 2t^2$. D'où $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p = -t^2 + t - \frac{3}{2}$. D'où la solution générale est $y = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b \neq 0$:

  Chercher une solution de la forme αe^{rt}.

Exemple 50

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{3t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 3 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha e^{3t}$. On a $y_p' = 3\alpha e^{3t}, y_p'' = 9\alpha e^{3t}$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $(9\alpha - 3\alpha - 2\alpha)e^{3t} = e^{3t}$, d'où $\alpha = \frac{1}{4}$. Une solution particulière est alors $y_p = \frac{1}{4}e^{3t}$. D'où la solution générale est $y = \frac{1}{4}e^{3t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme Ke^{rt}, avec $r^2 + ar + b = 0$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha t e^{rt}$ (ou $\alpha t^2 e^{rt}$ si r est racine double).

Exemple 51

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{2t}$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme 2 est racine simple du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = \alpha t e^{2t}$.

On a $y_p' = (2\alpha t + \alpha)e^{2t}, y_p'' = (4\alpha t + 4\alpha)e^{2t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$. D'où la solution générale est $y = \lambda e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t + \mu\right)e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme $p(t)e^{rt}$, où p est un polynôme de degré n :

  Chercher une solution de la forme $q(t)e^{rt}$, où q est un polynôme de degré n si $r^2 + ar + b \neq 0$, et de degré $n+1$ si $r^2 + ar + b = 0$ (ou même de degré $n+2$ si r est racine double).

Exemple 52

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = te^t$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = (\alpha t + \beta)\, e^t$.

On a $y_p' = (\alpha t + \alpha + \beta)\, e^t, y_p'' = (\alpha t + 2\alpha + \beta)\, e^t$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\alpha = \frac{-1}{2}, \beta = \frac{-1}{4}$. D'où la solution générale est $y = \frac{-1}{4}(2t+1)\, e^t + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est de la forme $d \cos(rt) + e \sin(rt)$:

  Chercher une solution de la forme $\alpha \cos(rt) + \beta \sin(rt)$ (ou $t(\alpha \cos(rt) + \beta \sin(rt))$ si $\cos(rt)$ est solution de l'équation homogène).

Exemple 53

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = \sin(2t)$.

La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution sous la forme $y_p = \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)$.

On a $y_p' = -2\alpha \sin(2t) + 2\beta \cos(2t)\,, y_p'' = -4\alpha \cos(2t) - 4\beta \sin(2t)$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve $-2(3\alpha + \beta)\cos(2t) + (2\alpha - 6\beta)\sin(2t) = \sin(2t)$, donc $3\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - 6\beta = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{20}, \beta = \frac{-3}{20}$.

Alors la solution générale est $y = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

- Si $c(t)$ est la somme de plusieurs fonctions $c_1(t), \cdots, c_k(t)$ qui sont chacune d'un des types ci-dessus :

  Chercher pour i de 1 à k une solution particulière $s_i(t)$ de chacune des équations

$$y'' + ay' + by = c_i(t)\,.$$

  La fonction $s_1(t) + \cdots + s_k(t)$ sera solution particulière de $y'' + ay' + by = c(t)$.

Exemple 54

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = 2t^2 + e^{2t}$.

Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2t^2$ est $y_{p_1} = -t^2 + t - \frac{3}{2}$.

Une solution particulière de $y'' - y' - 2y = e^{2t}$ est $y_{p_2} = \frac{1}{3}te^{2t}$.

Donc $y_p = -t^2 + t - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}te^{2t}$ est solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2t^2 + e^{2t}$. ∎

Résumons les cas ci-dessus dans le tableau suivant.

Second membre $c(t)$	Solution particulière $y_p(t)$
$c(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n	$y_p(t)$ polynôme de degré n si $b \neq 0$ de degré $n+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$ de degré $n+2$ si $a = b = 0$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b \neq 0$	$y_p(t) = \alpha e^{rt}$
$c(t) = Ke^{rt}$, avec $r^2 + ar + b = 0$	$y_p(t) = \alpha t e^{rt}$ si r racine simple. $y_p(t) = \alpha t^2 e^{rt}$ si r racine double.
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r^2 + ar + b \neq 0, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré n
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r^2 + ar + b = 0, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré $n+1$
$c(t) = p(t)\, e^{rt}, r = \frac{-a}{2}, \deg p = n$	$y_p(t) = q(t)\, e^{rt}$, q polynôme de degré $n+2$
$c(t) = d\cos(rt) + e\sin(rt)$	$y_p(t) = \alpha\cos(rt) + \beta\sin(rt)$

3.4.2 Solution particulière par la méthode de variation des constantes

Comme nous l'avons vu dans le cas général des équations linéaires du second ordre, une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = c(t)$ peut être obtenue par la méthode de variation des constantes (voir page 34).

$$y = y_1 \int \frac{-c(t)\, y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2 \int \frac{c(t)\, y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

où y_1 et y_2 sont 2 solutions particulières indépendantes de l'équation homogène $y''+ay'+by = 0$. Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes du polynôme caractéristique $r^2 + ar + b$, alors $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$. Dans ce cas, par intégration par parties, on peut écrire la solution générale de l'équation avec second membre en une seule formule

$$y = e^{r_1 t} \int \left(e^{(r_2 - r_1)t} \left(\int e^{-r_2 t} c(t)\, dt \right) \right) dt.$$

Exemple 55

Cherchons une solution de l'équation $y'' - y' - 2y = e^{-t}$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned} y &= e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(\int e^{-2t} e^{-t} dt \right) \right) dt = e^{-t} \int \left(e^{3t} \left(-\tfrac{1}{3} e^{-3t} + \lambda \right) \right) dt \\ &= e^{-t} \left(\tfrac{1}{3} \lambda e^{3t} - \tfrac{1}{3} t + \mu \right) = \tfrac{1}{3} \lambda e^{2t} + \left(\mu - \tfrac{1}{3} t \right) e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ ▪

3.5 Équations linéaires homogènes à coefficients analytiques

Soit donnée une équation différentielle du second ordre homogène

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{3.4}$$

Supposons que les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ puissent être représentés sous forme de séries suivant les puissances entières positives de t, c'est-à-dire $a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ et $b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$. Cherchons la solution de (3.4) sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$.

En introduisant cette expression de y et de ses dérivées dans (3.4), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,c_k t^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k\right) = 0. \tag{3.5}$$

En multipliant les séries entières, en groupant les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t au premier membre de (3.5), on obtient une série d'équations

$$\begin{aligned}
t^0 &: \quad 2\cdot 1 c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0,\\
t^1 &: \quad 3\cdot 2 c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0,\\
t^2 &: \quad 4\cdot 3 c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0,\\
. &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Chacune des équations suivantes (3.6) comporte un coefficient de plus que l'équation précédente. Les coefficients c_0 et c_1 restent arbitraires et jouent le rôle de constantes d'intégration. La première des équation (3.6) donne c_2, la deuxième c_3, la troisième c_4 et ainsi de suite. En pratique il est commode de procéder comme suit : d'après le schéma décrit plus haut on cherche deux solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$, en choisissant pour y_1, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ et pour y_2, $c_0 = 0$ et $c_1 = 1$. Toute solution de (3.4) sera une combinaison linéaire de $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

On peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 27

Si les séries $a(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ et $b(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$ convergent pour $|x| < R$, alors la série $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ construite par le procédé indiqué plus haut sera aussi convergente pour $|x| < R$ et constituera une solution de (3.4).

En particulier si $a(t)$ et $b(t)$ sont des polynômes en t, la série $y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ sera convergente pour toute valeur de t.

Exemple 56

Trouver la solution de l'équation

$$y''-ty'-2y=0 \tag{3.7}$$

sous forme d'une série entière.

Cherchons $y_1(t)$ sous forme de la série $y_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, alors

$$y_1'(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}, y_1''(t)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}.$$

En introduisant $y_1(t), y_1'(t)$ et $y_1''(t)$ dans (3.7), on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}-t\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k t^{k-1}-2\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k=0. \tag{3.8}$$

En groupant dans (3.8) les termes semblables et en annulant les coefficients de toutes les puissances de t, on obtient des relations permettant de déterminer $c_0, c_1, \cdots$.

Posons $y_1(0)=1$ et $y_1'(0)=0$. Alors on trouve $c_0=1, c_1=0$. Ainsi, on a

$$\begin{array}{ll} t^0: & 2c_2-2c_0=0, \text{ d'où } c_2=c_0=1, \\ t^1: & 6c_3-c_1-2c_1=0, \text{ d'où } c_3=\frac{1}{2}c_1=0, \\ t^2: & 12c_4-2c_2-2c_2=0, \text{ d'où } c_4=\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{3}, \\ t^3: & 20c_5-3c_3-2c_3=0, \text{ d'où } c_5=\frac{1}{4}c_3=0, \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{array}$$

Par conséquent $y_1(t)=1+t^2+\frac{1}{3}t^4+\cdots$. De façon analogue, en prenant $y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k t^k$ et les conditions initiales $y_2(0)=0$ et $y_2'(0)=1$, on obtient $\alpha_0=0, \alpha_1=1$.

En portant $y_2(t)$ dans (3.7), on trouve

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha_k t^{k-2}-\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)\alpha_k t^k=0.$$

Par un changement d'indice dans la première somme on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)\Big((k+1)\alpha_{k+2}-\alpha_k\Big)t^k=0.$$

Alors $\alpha_{k+2}=\frac{1}{k+1}\alpha_k, k=2,3,\cdots$. On en déduit que $\alpha_{2k}=0$ et $\alpha_{2k+1}=\frac{1}{k!2^k}$, et donc

$$y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!2^k}t^{2k+1}=t\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k=te^{\frac{t^2}{2}}.$$

La solution générale de l'équation (3.7) sera sous la forme $y(t)=\lambda y_1(y)+\mu y_2(t), \lambda, \mu\in\mathbb{R}$. ∎

3.5.1 Coefficients analytiques, points réguliers

Définition 28 (Points régulier et singulier)

On dit qu'un point t_0 est un point régulier ou ordinaire de l'équation différentielle

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0, \tag{3.9}$$

si les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ sont analytiques en ce point ; dans le cas contraire, le point t_0 s'appelle point singulier de l'équation différentielle (3.9).

Dans les exemples suivants, $t_0 = 0$.

L'équation différentielle d'Airy

C'est l'équation $y'' - ty = 0$.

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\, c_{k+2} = c_{k-1} \text{ pour } k \geq 1,\ c_2 = 0.$$

D'où $c_{3k} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot (3k-1)(3k)}$, $c_{3k+1} = \dfrac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3k)(3k+1)}$, $c_{3k+2} = 0$, et donc

$$y(t) = c_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k} t^{3k}\right) + c_1 \left(t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{3k+1} t^{3k+1}\right).$$

L'équation différentielle d'Hermite

C'est l'équation $y'' - 2ty' + ay = 0, a \in \mathbb{R}$.

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)\, c_{k+2} = -(a-2k)\, c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a(a-4)(a-8)\cdots(a-4(k-1))\, c_0,$$

$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} (a-2)(a-6)\cdots(a-2-4(k-1))\, c_1,$$

et

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) \text{ où } y_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = 2n$ est un entier pair, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme d'Hermite est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^n. Son expression est

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n! 2^{n-2k}}{k!(n-2k)!} t^{n-2k}.$$

L'équation différentielle de Tchebychev

C'est l'équation $(1-t^2)y'' - ty' + a^2 y = 0, a \in \mathbb{R}$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -\left(a^2 - k^2\right) c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a^2 (a^2-4)(a^2-16)\cdots\left(a^2-(2k-2)^2\right) c_0,$$
$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} (a^2-1)(a^2-9)\cdots\left(a^2-(2k-1)^2\right) c_1,$$

et

$$y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) \text{ où } y_0(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Tchebychev est normalisé par la condition que le coefficient de t^n vaut 2^{n-1}. Son expression est

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} t^{n-2k} \quad \text{avec} \quad \binom{j}{k} = \frac{j!}{k!(j-k)!}.$$

Le polynôme de Tchebychev possède la propriété remarquable de pouvoir s'écrire sous la forme $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arcsin} t)$. En effet, posant $t = \cos\theta$, l'équation $(1-t^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + n^2 y = 0$ devient $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0$ et $y = \cos(n\theta)$ est la solution qui coïncide avec $T_n(\cos\theta)$.

L'équation différentielle de Legendre

C'est l'équation $(1-t^2)y'' - 2ty' + a(a+1)y = 0, a \in \mathbb{R}$.
La relation de récurrence pour les coefficients de la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -(a(a+1) - k(k+1))c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$c_{2k} = \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} a\,(a-2)\cdots(a-2k+2)\,(a+1)\,(a+3)\cdots(a+2k-1)\,c_0,$$
$$c_{2k+1} = \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(a-1)\,(a-3)\cdots(a-2k+1)\,(a+2)\,(a+4)\cdots(a+2k)\,c_1,$$

et

$$y\,(t) = c_0 y_0\,(t) + c_1 y_1\,(t) \;\text{ où } y_0\,(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k} t^{2k} \text{ et } y_1\,(t) = t + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, $c_{n+2} = 0$ et la solution paire $y_0\,(t)$ est un polynôme si n est pair, la solution impaire $y_1\,(t)$ est un polynôme si n est impair. Le n-ième polynôme de Legendre $P_n\,(t)$ est normalisé par la condition que $P_n\,(1) = 1$. Son expression est

$$P_n\,(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} t^{n-2k}.$$

3.5.2 Coefficients analytiques, points singuliers

Nous supposons que t_0 est un point singulier régulier de l'équation différentielle

$$y'' + a\,(t)\,y' + b\,(t)\,y = 0,$$

c'est-à-dire que les limites $\lim\limits_{t \to t_0} (t - t_0)\,a\,(t)$ et $\lim\limits_{t \to t_0} (t - t_0)^2\,b\,(t)$ existent. Pour simplifier, prenons $t_0 = 0$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$t^2 y'' + tp\,(t)\,y' + q\,(t)\,y = 0, \tag{3.10}$$

où $p\,(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ et $q\,(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k t^k$ sont analytiques dans $|t| < \rho$.
Pour résoudre cette équation, on cherche, suivant Frobenius, une solution de la forme

$$y\,(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k, \;\; c_0 \neq 0. \tag{3.11}$$

Pour déterminer l'exposant r et les coefficients c_k il faut introduire la série (3.11) dans l'équation (3.10), simplifier par t^r et annuler les coefficients de toutes les puissances de t. Dans ce cas, le nombre r se détermine à partir de l'équation dite déterminante

$$F\,(r) = r\,(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{3.12}$$

Soient r_1 et r_2 les racines de l'équation déterminante (3.12). Trois cas différents peuvent se présenter.

1. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, alors on peut construire deux solutions de la forme (3.11)

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0, \qquad y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,\ c_{2,0} \neq 0.$$

2. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, alors $y_1(t) = t^{r_1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ c_{1,0} \neq 0$ et y_2 est une deuxième solution linéairement indépendante analytique dans $0 < t < \rho$:

$$y_2(t) = a y_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k} t^k,$$

avec a une constante dépendante de r_2.

3. Si $r_1 = r_2$, alors y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes analytiques dans $0 < t < \rho$:

$$y_1(t) = t^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k} t^k,\ y_2(t) = y_1(t) \operatorname{Log} t + t^{r_2} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2,k} t^k.$$

Exemple 57

Résoudre l'équation

$$2t^2 y'' + t(3-2t) y' - (t+1) y = 0. \tag{3.13}$$

Écrivons (3.13) sous la forme

$$y'' + \frac{3-2t}{2t} y' - \frac{t+1}{2t^2} y = 0.$$

Cherchons la solution y sous la forme $y(t) = t^r \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0$. Pour déterminer r écrivons l'équation déterminante $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, où $p_0 = \lim\limits_{t\to 0} \frac{3-2t}{2} = \frac{3}{2}$ et $q_0 = \lim\limits_{t\to 0} \left(-\frac{t+1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $r(r-1) + \frac{3}{2} r - \frac{1}{2} = 0$, ou $r^2 + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$, d'où $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$.

En vertu de la règle énoncée plus haut, prenons

$$y_1(t) = \sqrt{t} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, (t > 0), \qquad y_2(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Pour trouver les a_k il faut introduire y_1 et ses dérivées y_1' et y_1'' dans (3.13)

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}},\ y_1'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k + \tfrac{1}{2}\right) a_k t^{k-\frac{1}{2}},\ y_1''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_k t^{k-\frac{3}{2}}.$$

L'introduction de y_1, y_1' et y_1'' dans (3.13) donne

$$2t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_k t^{k-\frac{3}{2}} + t(3-2t) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k + \tfrac{1}{2}\right) a_k t^{k-\frac{1}{2}} - (t+1) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Après les transformations, on obtient

$$\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} k\,(2k+3)\,a_k t^k - \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} 2\,(k+1)\,a_k t^{k+1} = 0.$$

La relation de récurrence pour les coefficients de la solution y_1 est donc

$$k\,(2k+3)\,a_k = 2ka_{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

En prenant $a_0 = 1$, il vient $a_k = \frac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\dots\cdot(2k+3)}$, $k \geq 1$, et donc

$$y_1\,(t) = \sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\dots\cdot(2k+3)} t^k, (t > 0)\,.$$

D'une manière analogue, en prenant $b_0 = 1$, on obtient $b_k = \frac{1}{k!}$, si bien que $y_2\,(t) = \frac{1}{t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k$ ou $y_2\,(t) = \frac{e^t}{t}$. La solution générale de l'équation (3.13) est

$$y\,(t) = \lambda y_1\,(t) + \mu y_2\,(t) = \lambda\sqrt{t}\sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{2^k}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\dots\cdot(2k+3)} t^k + \mu\frac{e^t}{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

L'équation différentielle d'Euler

C'est l'équation $t^2 y'' + tp_0 y' + q_0 y = 0,\ p_0, q_0 \in \mathbb{R}$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$. On a

$$y' = rt^{r-1} \text{ et } y'' = r\,(r-1)\,t^{r-2},$$

en reportant, on obtient l'équation $r\,(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ du second degré en r.

Si cette équation a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$ alors $y_1 = t^{r_1}$ et $y_2 = t^{r_2}$ sont deux solutions particulières indépendantes donc $y = \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Sinon on utilise la méthode plus générale : on effectue un changement de variable en posant $t = e^s$, on note $y\,(t) = y\,(e^s) = z\,(s)$ et on exprime $\dfrac{dy}{dt}$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ en fonction de $\dfrac{dz}{ds}$ et $\dfrac{d^2z}{ds^2}$.

On a

$$\frac{dy\,(t)}{dt} = \frac{dy\,(e^s)}{dt} = \frac{dy\,(e^s)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dz\,(s)}{ds}\cdot\frac{1}{t} \quad \text{donc } t\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz\,(s)}{ds}\cdot\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right) \quad \text{donc } t^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}.$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^2z}{ds^2} + (p_0 - 1)\,\frac{dz}{ds} + q_0 z = 0.$$

On aura alors suivant la nature des racines du polynôme caractéristique $r^2 + (p_0 - 1)\,r + q_0$:

- $y = \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2}$ dans le cas de deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, $r_1 \neq r_2$.
- $y = t^a \left(\lambda \cos\left(b \operatorname{Log} t\right) + \mu \sin\left(b \operatorname{Log} t\right)\right)$ dans le cas de deux racines complexes conjuguées $a \pm ib = \frac{1-p_0}{2} \pm i\frac{\sqrt{4q_0-(1-p_0)^2}}{2}$.
- $y = \left(\lambda + \mu \operatorname{Log} t\right) t^{r_0}$ dans le cas d'une racine réelle double $r_0 = \frac{1-p_0}{2}$.

Exemple 58

a) $t^2y'' - ty' - 3y = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$, on obtient une équation du second degré $r\left(r-1\right) - r - 3 = 0$ soit $r^2 - 2r - 3 = 0$, on trouve $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. Alors la solution générale est $y = \lambda t^3 + \dfrac{\mu}{t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $t^2y'' + 3ty' + y = 0$.

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$, on obtient une équation du second degré $r\left(r-1\right) + 3r + 1 = 0$ soit $\left(r+1\right)^2 = 0$, on trouve $r = -1$ comme racine double. On utilise alors la méthode plus générale : on pose $t = e^s$ et on note $y\left(t\right) = y\left(e^s\right) = z\left(s\right)$. Alors $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dz}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}\dfrac{dz}{ds}$ car $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{d^2z}{ds^2} - \dfrac{dz}{ds}\right)$. L'équation $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ se transforme alors en $\dfrac{d^2z}{ds^2} + 2\dfrac{dz}{ds} + z = 0$. On résout l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$: on trouve $r = -1$ comme racine double donc $z\left(s\right) = e^{-s}\left(\lambda + \mu s\right)$. Alors la solution générale est $y = \dfrac{1}{t}\left(\lambda + \mu \operatorname{Log} t\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ■

L'équation différentielle de Laguerre

C'est l'équation $ty'' + \left(1-t\right)y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

On a ici $p\left(t\right) = 1-t$ et $q\left(t\right) = at$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. L'équation déterminante est $r\left(r-1\right) + p_0 r + q_0 = 0$, où $p_0 = p\left(0\right) = 1$ et $q_0 = q\left(0\right) = 0$, c'est-à-dire $r\left(r-1\right) + r = 0$, ou $r^2 = 0$, d'où $r_1 = r_2 = 0$.

La relation de récurrence pour les coefficients c_k de la solution $y_1\left(t\right) = t^{r_1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ est

$$k^2 c_k = -\left(a+1-k\right)c_{k-1} \text{ pour } k \geq 1.$$

En prenant $c_0 = 1$, il vient $c_k = \left(-1\right)^k \frac{a(a-1)\cdots(a-(k-1))}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2}$, $k \geq 1$, et donc

$$y_1\left(t\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^k \frac{a\left(a-1\right)\cdots\left(a-\left(k-1\right)\right)}{\left(k!\right)^2} t^k,$$

et

$$y_2\left(t\right) = y_1\left(t\right)\operatorname{Log} t + t^{r_2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k = y_1\left(t\right)\operatorname{Log} t + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k.$$

Lorsque $a = n$ est un entier, y_1 est un polynôme. Le n-ième polynôme de Laguerre $L_n(t)$ est normalisé par $L_n(0) = 1$. Son expression est

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}, \text{ où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

L'équation différentielle hypergéométrique

C'est l'équation $t(1-t)y'' + (\gamma - (1+\alpha+\beta)t)y' - \alpha\beta y = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Ici $p(t) = \frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)t}{1-t}$ et $q(t) = \frac{-\alpha\beta t}{1-t}$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = \gamma$ et $q_0 = q(0) = 0$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + \gamma r = 0$, d'où $r_1 = 0$ et $r_2 = 1 - \gamma$. Le point $t = 1$ est aussi un point singulier régulier.
On considère le point $t = 0$ en supposant que $1 - \gamma \notin \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $]0, 1[$, on aura une solution $y_1(t) = t^{r_1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ avec la récurrence $(k+1)(k+\gamma)c_{k+1} = (k+\alpha)(k+\beta)c_k$ pour $k \geq 0$, ce qui conduit, en prenant $c_0 = 1$, à

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{(k!)^2} t^k.$$

On aura une seconde solution linéairement indépendante $y_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)$ avec cette fois la récurrence

$$(k+1)(k+1+1-\gamma)c_{k+1} = (k+1-\gamma+\alpha)(k+1-\gamma+\beta)c_k \text{ pour } k \geq 0.$$

D'où

$$y_2(t) = t^{1-\gamma}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\alpha+1-\gamma)\cdots(\alpha+k-\gamma)(\beta+1-\gamma)\cdots(\beta+k-\gamma)}{(k!)(2-\gamma)\cdots(k+1-\gamma)} t^k\right).$$

Quant au point $t = 1$, le changement de variables $s = 1-t, z(s) = y(1-t)$ on ramène l'étude à celle de l'équation

$$s(1-s)z'' + (1+\alpha+\beta-\gamma-(1+\alpha+\beta)s)z' - \alpha\beta z = 0$$

au point $s = 0$.
La fonction hypergéométrique est

$${}_pF_q(a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q)(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_p)_k k!} t^k,$$

où $(c)_k = c(c+1)(c+2)\cdots(c+k-1)$, $k \geq 1$.

L'équation différentielle de Bessel

C'est l'équation $t^2y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)\, y = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.
Ici $p(t) = 1$ et $q(t) = t^2 - \alpha^2$ et $t = 0$ est un point singulier régulier. On a $p_0 = p(0) = 1$ et $q_0 = q(0) = -\alpha^2$, donc l'équation déterminante en $t = 0$ est $r(r-1) + r - \alpha^2 = 0$, d'où $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = \alpha$.
Cherchons une première solution particulière y_1 sous la forme $y_1(t) = t^\alpha \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k,\ c_0 \neq 0$.
Introduisons y_1, y_1' et y_1'' dans l'équation différentielle de Bessel, il vient

$$t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)\, c_k t^{k+\alpha-2} + t \sum_{k=0}^{+\infty} (k+\alpha)\, c_k t^{k+\alpha-1} + \left(t^2 - \alpha^2\right) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+\alpha} = 0,$$

ou encore, après des transformations simples et la simplification par t^α,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+\alpha)^2 - \alpha^2\right) c_k t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+2} = 0.$$

Ce qui donne la récurrence $\left((k+\alpha)^2 - \alpha^2\right) c_k = -c_{k-2}$ pour $k \geq 2$, ce qui conduit à

$$c_{2k+1} = 0,\ k \geq 0,\ \text{ et } c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\, k!},\ k \geq 1.$$

Pour simplifier les calculs ultérieures, prenons $c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, qui est déterminée pour toutes les valeurs positives (ainsi que pour toutes les valeurs complexes à partie réelle positive) par la relation

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx.$$

La fonction gamma possède les propriétés importantes suivantes :

1) $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$,

2) $\Gamma(k) = k!,\quad k \in \mathbb{N}^*$,

3) $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\,\Gamma(\nu+1),\quad k \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant les propriétés de la fonction gamma, écrivons le coefficient c_{2k} sous la forme

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\,\Gamma(\alpha+1)\, k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha}\Gamma(\alpha+k+1)\, k!}.$$

Maintenant, la première solution particulière de l'équation de Bessel, que nous désignerons par J_α prend la forme

$$y_1(t) = J_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha}. \tag{3.14}$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre α.

Une deuxième solution particulière y_2 de l'équation de Bessel sera cherchée sous la forme $y_2(t) = t^{-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, $c_0 \neq 0$. Il est clair que cette solution peut être obtenue à partir de (3.14) en remplaçant α par $-\alpha$

$$y_2(t) = J_{-\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\alpha}.$$

Cette fonction s'appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre $-\alpha$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, les solutions J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement indépendantes, donc la solution générale de l'équation de Bessel peut être représentée sous la forme

$$y(t) = \lambda J_\alpha(t) + \mu J_{-\alpha}(t), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, J_α et $J_{-\alpha}$ sont linéairement dépendantes puisque $J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$. Ainsi, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, au lieu de $J_{-\alpha}$ il faut chercher une autre solution qui soit linéairement indépendante de J_α. À cet effet, introduisons une nouvelle fonction

$$Y_\alpha(t) = \frac{J_\alpha(t)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{3.15}$$

en considérant d'abord que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Il est évident que la fonction Y_α ainsi définie est solution de l'équation de Bessel, parce qu'elle représente une combinaison linéaire de solutions particulières J_α et $J_{-\alpha}$.

En passant dans (3.15) à la limite lorsque α tend vers un entier, on obtient un solution particulière Y_α linéairement indépendante de J_α.

La fonction Y_α introduite ci-dessus s'appelle fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre α.

La solution générale de l'équation de Bessel si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ peut être représentée sous la forme

$$y(t) = \lambda J_\alpha(t) + \mu Y_\alpha(t), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$