USTHB 2017-2018 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Examen final - 17 janvier 2018. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom : ....

Matricule : ....

/20

Exercice 1 (6 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer l'unique fonction solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $ty' = \alpha y + \beta t^r, \alpha, \beta, r \in \mathbb{R}, \;\; y(1) = 0.$

b) $y'' - 2y' + (1 + \alpha^2) y = (1 + 4\alpha^2) \cos(\alpha t), \alpha \in \mathbb{R}^*, \; y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Réponse.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2 (5 pts.) : a) Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) : y'' - y' + y = 0.$

b) On veut déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $(E_2) : u'(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$

i) Pour u une solution de (E_2), on pose $g(s) = u(e^s)$, montrer que g est solution de (E_1).

ii) Trouver toutes les fonctions u vérifiant (E_2).

Noter que la solution générale de (E_2) dépend d'un seul paramètre.

Réponse.

Exercice 3 (5 pts.) : On cherche à déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}_+$ telles que $y(0) > 0$ et vérifiant l'équation différentielle de Bernoulli : $y' = 3y^2 - 2y$.

On suppose l'existence d'une fonction y solution, et on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction g par : $g(t) = y(t)\,e^{2t}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction g, et montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) > 0$.

c) On pose alors $u = \dfrac{1}{y}$. Montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

d) Lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, exprimer $u(t)$, puis $y(t)$ en fonction de t et de $y(0)$.

e) En déduire que $y(0) \leq \frac{2}{3}$.

Réponse.

Exercice 4 (4 pts.) : Soit $a \in]0,1[$. On considère le problème de Cauchy (P_1) : $\begin{cases} y' = |y|^a \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

a) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) Conclure.

Réponse.