USTHB 2017-2018 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

Équations différentielles
3ème année LAC

Examen final - 17 janvier 2018. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :..........

Matricule :..........

/ **20**

Exercice 1 (6 pts.) : Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer l'unique fonction solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $ty' = \alpha y + \beta t^r, \alpha, \beta, r \in \mathbb{R}, \ \ y(1) = 0.$

b) $y'' - 2y' + (1+\alpha^2)\, y = (1+4\alpha^2)\cos(\alpha t)\,, \alpha \in \mathbb{R}^*,\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Réponse.

a) L'équation différentielle $ty' = \alpha y + \beta t^r$, est linéaire d'ordre 1, à coefficients non constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $ty' - \alpha y = 0$. La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{t}$ ou $\frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{t}dt$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient $\mathrm{Log}\,|y(t)| = \mathrm{Log}\,|t|^\alpha + K$, avec $K \in \mathbb{R}$, ou bien $y = Ct^\alpha, \quad C \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire, on cherche la solution générale sous la forme $y = C(t)\, t^\alpha$. Il vient $t\left(C'(t)\, t^\alpha + \alpha C(t)\, t^{\alpha-1}\right) = \alpha C(t)\, t^\alpha + \beta t^r$, et donc $C'(t) = \beta t^{r-\alpha-1}$, ce qui permet, en intégrant de trouver

$$C(t) = \frac{\beta}{r-\alpha} t^{r-\alpha} \text{ si } r \neq \alpha \text{ et } C(t) = \beta\,\mathrm{Log}\,|t| \text{ si } r = \alpha.$$

La solution générale de l'équation $ty' = \alpha y + \beta t^r$ est donc

$$y = \tfrac{\beta}{r-\alpha} t^r + \lambda t^\alpha \text{ si } r \neq \alpha \quad \text{et} \quad y = t^r\left(\lambda + \beta\,\mathrm{Log}\,|t|\right) \text{ si } r = \alpha \ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, si l'on cherche une solution vérifiant $y(1) = 0$, on doit avoir

$$\lambda = \tfrac{-\beta}{r-\alpha} \text{ si } r \neq \alpha \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \text{ si } r = \alpha.$$

L'unique solution qui vérifie $y(1) = 0$ est donc

$$y = \tfrac{\beta}{r-\alpha}\left(t^r - t^\alpha\right) \text{ si } r \neq \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta t^r\,\mathrm{Log}\,|t| \text{ si } r = \alpha.$$

b) L'équation différentielle en question, est linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, avec second membre. L'équation homogène associée est $y'' - 2y' + (1+\alpha^2)\, y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 + \alpha^2 = 0$ qui admet pour discriminant $-4\alpha^2$ dont les racines sont $\pm 2i\alpha$. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $1 \pm i\alpha$ et les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(t) = e^t\left(\lambda\cos(\alpha t) + \mu\sin(\alpha t)\right) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)$. On a

$$y_p'(t) = -a\alpha\sin(\alpha t) + b\alpha\cos(\alpha t), \quad y_p''(t) = -a\alpha^2\cos(\alpha t) - b\alpha^2\sin(\alpha t).$$

Alors

$$y_p'' - 2y_p' + \left(1+\alpha^2\right) y_p = (a - 2b\alpha)\cos(\alpha t) + (b + 2a\alpha)\sin(\alpha t).$$

Par identification, on cherche a et b satisfaisant le système

$$\begin{cases} a - 2b\alpha = 1 + 4\alpha^2 \\ b + 2a\alpha = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne $a = 1$ et $b = -2\alpha$. Les solutions de l'équation non homogène sont donc

$$y(t) = e^t(\lambda\cos(\alpha t) + \mu\sin(\alpha t)) + \cos(\alpha t) - 2\alpha\sin(\alpha t), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(0) = 1$ donne $\lambda = 0$, tandis que la condition $y'(0) = 0$ donne $\mu = 2\alpha$. L'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est donc

$$y(t) = 2\alpha\left(e^t - 1\right)\sin(\alpha t) + \cos(\alpha t).$$

Exercice 2 (5 pts.) : a) Résoudre l'équation différentielle : $(E_1) : y'' - y' + y = 0$.

b) On veut déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $(E_2) : u'(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$.

i) Pour u une solution de (E_2), on pose $g(s) = u(e^s)$, montrer que g est solution de (E_1).

ii) Trouver toutes les fonctions u vérifiant (E_2).

Noter que la solution générale de (E_2) dépend d'un seul paramètre.

Réponse.

a) L'équation caractéristique de cette équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants est $r^2 - r + 1 = 0$, et ses racines sont $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de cette équation sont donc

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) *i)* Supposons que u est une solution de (E_2). On a la fonction $s \mapsto e^s$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; et la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $s \mapsto g(s) = u(e^s)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $g'(s) = e^s u'(e^s)$ et comme $u'(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$ on a $g'(s) = e^s u(e^{-s})$. On en déduit que g' est dérivable et $g''(s) = e^s u(e^{-s}) + e^s(e^{-s}u'(e^{-s}))$ ou encore $g''(s) = e^s u(e^{-s}) + u(e^s)$. On vérifie bien que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $g''(t) - g'(t) + g(t) = 0$. On en déduit que si u est une solution de (E_2), alors $s \mapsto g(s) = u(e^s)$ est solution de (E_1).

ii) La question précédente montre que si u est une solution de (E_2), alors il existe λ et μ tels que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g(s) = u(e^s) = e^{\frac{s}{2}} \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} s\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} s\right) \right).$$

On a alors pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) = \sqrt{t} \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) \right).$$

Il nous reste à chercher parmi ces dernières fonctions, celles qui sont solutions de (E_2).

Soit λ et μ deux réels et $u(t) = \sqrt{t} \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) \right)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$, on a

$$u'(t) = \tfrac{1}{2\sqrt{t}} \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) \right) + \sqrt{t} \left(\tfrac{-\lambda\sqrt{3}}{2t} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \tfrac{\mu\sqrt{3}}{2t} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) \right).$$

Après simplification,

$$u'(t) = \tfrac{\lambda+\mu\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \tfrac{\mu-\lambda\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right).$$

D'autre part,

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = \tfrac{\lambda}{\sqrt{t}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) - \tfrac{\mu}{\sqrt{t}} \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right).$$

Par identification,

$$\lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \quad \text{et} \quad \mu - \lambda\sqrt{3} = -2\mu.$$

Ce qui est équivalent à $\lambda = \mu\sqrt{3}$.

En conclusion, toutes les fonctions u vérifiant (E_2) sont

$$u(t) = \lambda\sqrt{t} \left(\sqrt{3} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) + \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Log} t\right) \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 (5 pts.) : On cherche à déterminer les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}_+$ telles que $y(0) > 0$ et vérifiant l'équation différentielle de Bernoulli : $y' = 3y^2 - 2y$.

On suppose l'existence d'une fonction y solution, et on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction g par : $g(t) = y(t)\, e^{2t}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction g, et montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) > 0$.

c) On pose alors $u = \dfrac{1}{y}$. Montrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

d) Lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, exprimer $u(t)$, puis $y(t)$ en fonction de t et de $y(0)$.

e) En déduire que $y(0) \leq \frac{2}{3}$.

Réponse.

a) La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc g l'est aussi et pour tout $t > 0$ on a

$$g'(t) = y'(t)\, e^{2t} + 2y(t)\, e^{2t},$$

et comme $y' = 3y^2 - 2y$, il vient, pour tout $t > 0$,

$$g'(t) = 3y(t)^2 e^{2t}.$$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t > 0$, $g'(t) > 0$ et ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a $g(0) = y(0) e^{2\times 0} = y(0) > 0$ et comme on sait de plus que g est croissante on en déduit que pour tout $t > 0$, $g(t) \geq g(0) > 0$. Et comme on a pour tout $t > 0$, $g(t) = y(t) e^{2t}$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t) > 0$.

c) La fonction y est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u' = \dfrac{-y'}{y^2}$. Comme $y' = 3y^2 - 2y$, il vient pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u' = \frac{-3y^2 + 2y}{y^2} = -3 + \frac{2}{y} = -3 + 2u.$$

d) La solution générale de l'équation précédente est $u(t) = \dfrac{3}{2} + \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Or $u(0) = \dfrac{1}{y(0)}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u(t) = \frac{3}{2} + \left(\tfrac{1}{y(0)} - \tfrac{3}{2}\right) e^{2t} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{y(0)} - \frac{3}{2}\right) e^{2t}}.$$

e) La fonction y est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $\frac{1}{y(0)} - \frac{3}{2} \geq 0$, sinon le dénominateur s'annule sur $\mathbb{R}_+$. Il vient alors $y(0) \leq \frac{2}{3}$.

Exercice 4 (4 pts.) : Soit $a \in]0,1[$. On considère le problème de Cauchy (P_1) : $\begin{cases} y' = |y|^a \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

a) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(t) = \begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) Conclure.

Réponse.

a) Si $a \in]0,1[$, alors $\frac{1}{1-a} > 1$. On a donc pour $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} - 0}{t - 0} = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0.$$

La fonction y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$y'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} ((1-a)\,t)^{\frac{a}{1-a}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right| = |y(t)|^a.$$

Il vient que $y(t) = \begin{cases} ((1-a)\,t)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution du problème de Cauchy (P_1).

b) On remarque que la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est une autre solution de notre problème. Non unicité de la solution vient du fait que la fonction $f(t,y) = |y|^a$ n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.