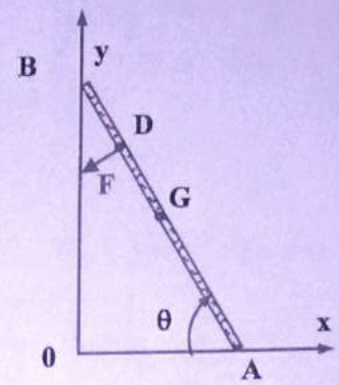
USTHB, FGM&GP
3ème Année Licence MC

Le 14 janvier 2013
Durée : 40 mn

Interrogation de Mécanique Analytique

Exercice 1 (7pts)

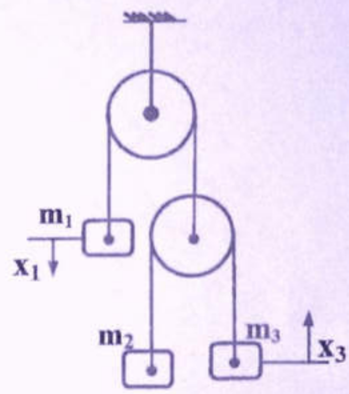


Une échelle de masse **m** et de longueur **L** s'appuie contre le mur vertical sans frottement faisant l'angle θ. Au point D s'applique une force F perpendiculaire à l'échelle. AD=3L/4.

Par le principe des travaux virtuels :

1. Quelle est la force de frottement T avec le sol à l'équilibre.
2. Calculer la réaction R_A.

Exercice 2 (8pts)



Soit le dispositif à double poulies dont les masses sont négligeables. Les masses m_i se déplacent verticalement. En prenant comme coordonnées généralisées, les déplacements des masses m_1 et m_3 :

1. Calculer les forces généralisées Q_{x1} et Q_{x3}
2. Par le principe de D'Alembert, calculer les accélérations $\ddot{x}_1$ et $\ddot{x}_3$

Correction de l'interrogation de Mécanique Analytique.

Exercice 1 (7 pts)

1°/ Calcul de T par le P.T.V ; $\vec{R_A}.\delta\vec{A} = 0$; $\vec{R_B}.\delta\vec{B} = 0 \rightarrow$ 0.5

$\delta W = 0 \Rightarrow \vec{P}.\delta\vec{OG} + \vec{F}.\delta\vec{OD} + \vec{T}.\delta\vec{OA} = 0$ 0.5 $\quad y_G = \frac{L}{2}\sin\theta$; $\delta y_G = \frac{L}{2}\cos\theta\,\delta\theta$

$-mg.\delta y_G + \begin{cases} F_x \\ F_y \end{cases} . \begin{cases} \delta x_D \\ \delta y_D \end{cases} - T.\delta x_A = 0$ 0.5 $\quad x_A = L\cos\theta$; $\delta x_A = -L\sin\theta\,\delta\theta$

$\vec{OD} = \begin{cases} \frac{L}{4}\cos\theta \\ \frac{3L}{4}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \delta\vec{OD} = \begin{cases} -\frac{L}{4}\sin\theta\,\delta\theta \\ \frac{3}{4}L\cos\theta\,\delta\theta \end{cases}$ 0.5 $\quad \vec{F} = \begin{cases} -F\sin\theta \\ -F\cos\theta \end{cases}$

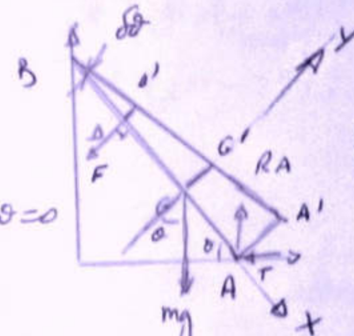
$\delta W = \left[-mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{FL}{4}(\sin^2\theta - 3\cos^2\theta) + TL\sin\theta\right]\delta\theta = Q_\theta.\delta\theta \quad \delta\theta \neq 0$

0.5 0.5 0.5

$\Rightarrow Q_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{2}\cot g\theta - \frac{F}{4}(\sin\theta - 3\cot g\theta\cos\theta)}$ 1

2°/ Calcul de R_A soit (a) ou (b)

(a) par rotation de $\delta\theta$ autour du point B



0.5

$\delta W = m\vec{g}.\delta\vec{G} + (\vec{R_A}+\vec{T})\delta\vec{A} + \vec{F}.\delta\vec{D} = 0$ 0.5

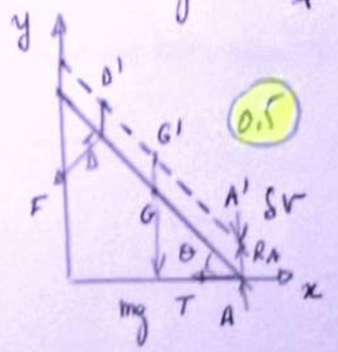
$\delta W = m\vec{g}.\vec{GG'} + (\vec{R_A}+\vec{T})\vec{AA'} + \vec{F}.\vec{DD'} = 0$

$\delta W = (-mg\cos\theta)\frac{L}{2}\delta\theta + (R_A\cos\theta - T\sin\theta)L\delta\theta - F\frac{1}{4}L\delta\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_A = \frac{mg}{2} + T.tg\theta + \frac{1}{4}\frac{F}{\cos\theta}}$ 1

Soit

(b) par translation de δv le long de l'axe y



0.5

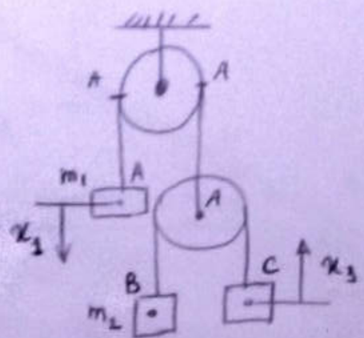
$\delta G = \delta A = \delta D = \delta v \quad (\vec{T} \perp \delta\vec{v})$

$R_A.\delta v - mg.\delta v - F\cos\theta.\delta v = 0$ 0.5

$\Rightarrow \boxed{R_A = mg + F\cos\theta}$ 1

8,25

Exercice 2 (8 pts)



$\delta x_1 = \delta A$ 0.5

$\delta x_3 = \delta A - r\,\delta\varphi = \delta x_1 - r\,\delta\varphi$ 0.5

$\delta x_2 = \delta A + r\,\delta\varphi = \delta x_1 + r\,\delta\varphi$

$\Rightarrow \delta x_3 + \delta x_2 = 2\,\delta x_1 \Rightarrow \boxed{\delta x_2 = 2\delta x_1 - \delta x_3}$

0.5

donc $\ddot{x}_2 = 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3$

A. DEROUICHE

Pa

2/2

1°/ forces généralisés Q_{x_1} et Q_{x_3} $\quad q_1 = x_1$ et $q_2 = x_3$

$$\delta W = Q_{x_1} \cdot \delta x_1 + Q_{x_3} \cdot \delta x_3 \quad 0{,}5$$

$$= m_1 \vec{g} \cdot \vec{\delta A} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{\delta B} + m_3 \vec{g} \cdot \vec{\delta C} = m_1 g\, \delta x_1 - m_2 g (2\delta x_1 - \delta x_3) - m_3 g\, \delta x_3$$

0,5 0,5 0,5

$$\Rightarrow (m_1 g - m_2 g \times 2)\, \delta x_1 + (m_2 g - m_3 g)\, \delta x_3$$

$$\Rightarrow Q_{x_1} = (m_1 - 2m_2) g \quad 1 \quad \text{et} \quad Q_{x_3} = (m_2 - m_3) g \quad 1$$

2°/ Par D'Alembert, Eqs de mvt $\Rightarrow$

$$\delta A = \delta W \ ; \quad \delta A = m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3 \quad 0{,}75$$

$$= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 (2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)(2\delta x_1 - \delta x_3) + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3$$

$$= \left[m_1 \ddot{x}_1 + 2m_2(2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)\right] \delta x_1 + \left[m_3 \ddot{x}_3 + m_2(2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3)\right] \delta x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 - 2m_2 \ddot{x}_3 = (m_1 - 2m_2) g \longrightarrow (1) \quad 1 \\ (m_3 - m_2)\ddot{x}_3 + 2m_2 \ddot{x}_1 = (m_2 - m_3) g \longrightarrow (2) \quad 1 \end{cases}$$

A. DEROUICHE

USTHB

Faculté GM&GP

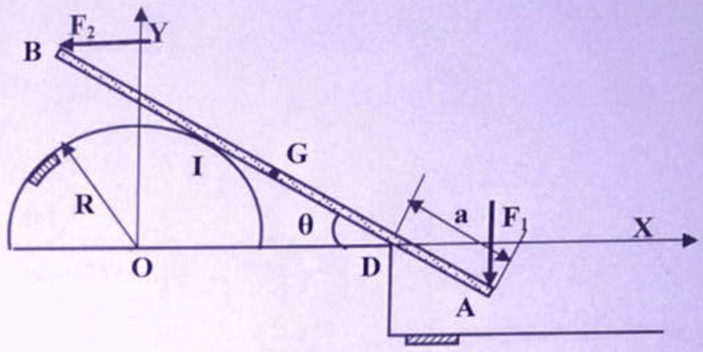
Licence MC

Mécanique Analytique 2015-2016

Contrôle continu :V1

Exercice

Une barre **AB** homogène de masse **M** et de longueur **2L** repose sur l'arête en **D** du sol et sur une demi-circonférence de rayon **R** au point **I**. Sa position est déterminée par l'angle **θ**, et à ses extrémités, elle est soumise aux forces F_1 **et** F_2 comme indiqué sur la figure. Les frottements sont négligés. **AD=a** ;



1. Calculer les déplacements virtuels des points A et B ($\overrightarrow{\delta A}$ et $\overrightarrow{\delta B}$).

Par le principe des travaux virtuels :

2. Calculer la force F_2 à l'équilibre.
3. Calculer la réaction en D.

A.DEROUICHE

USTHB

Faculté GM&GP

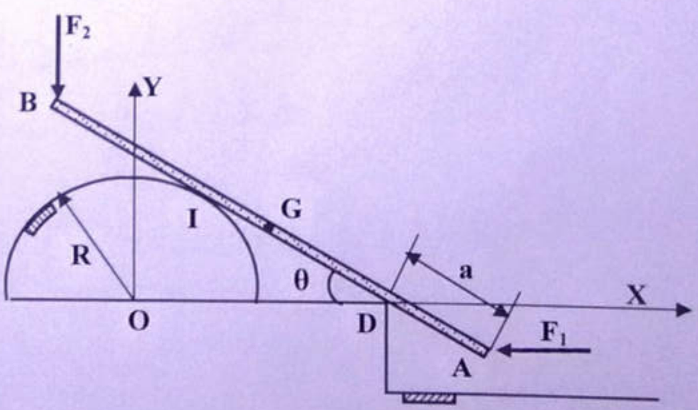
Licence MC

Mécanique Analytique 2015-2016

Contrôle continu :V2

Exercice

Une barre **AB** homogène de masse **M** et de longueur **2L** repose sur l'arête en **D** du sol et sur une demi-circonférence de rayon **R** au point **I**. Sa position est déterminée par l'angle **θ**, et à ses extrémités, elle est soumise aux forces F_1 **et** F_2 comme indiqué sur la figure. Les frottements sont négligés. **AD=a** ;



1. Calculer les déplacements virtuels des points A et G ($\overrightarrow{\delta A}$ et $\overrightarrow{\delta G}$).

Par le principe des travaux virtuels :

2. Calculer la force F_1 à l'équilibre.
3. Calculer la réaction en I.

A.DEROUICHE

THB

Faculté GM&GP

Licence MC

Mécanique Analytique

2015-2016

Corrigé du Contrôle Continu

V1

1°/ Calcul de $\overrightarrow{\delta A}$ et $\overrightarrow{\delta B}$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \begin{cases} R/\sin\theta + a\cos\theta \\ -a\sin\theta \end{cases} \quad (0{,}5) \Rightarrow \overrightarrow{\delta A} = \begin{cases} -\left(\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} + a\sin\theta\right)\cdot\delta\theta \\ -a\cos\theta\cdot\delta\theta \end{cases} \quad (0{,}5)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{cases} R/\sin\theta + (2L-a)\cos\theta \\ (2L-a)\sin\theta \end{cases} \quad (0{,}5) \Rightarrow \overrightarrow{\delta B} = \begin{cases} -\left(\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} + (2L-a)\sin\theta\right)\cdot\delta\theta \\ +\cos\theta\,(2L-a)\cdot\delta\theta \end{cases} \quad (0{,}5)$$

2°/ Calcul de F_2 par le PTV

$$\delta W = \vec{F_1}\cdot\overrightarrow{\delta A} + m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta G} + \vec{F_2}\cdot\overrightarrow{\delta B} \quad (0{,}5) = -F_1\cdot\delta y_A - m\vec{g}\cdot\delta y_G - F_2\cdot\delta x_B = 0 \quad (0{,}5)$$

$$\delta W = \left[F_1\cdot a\cos\theta - mg\left(-\cos\theta(a-L)\right) - F_2\left(\frac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} - (2L-a)\sin\theta\right)\right]\delta\theta = 0.$$

$$\delta W = Q_\theta\cdot\delta\theta = 0 \quad (0{,}5) \quad \delta\theta \neq 0 \Rightarrow \quad Q_\theta = 0 \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{\left[F_1\cdot a\cos\theta - mg\cos\theta(L-a)\right]\sin^2\theta}{R\cos\theta - (2L-a)\sin^3\theta} \quad (1)$$

3°/ Calcul de la réaction R_D

Par rotation de $\delta\theta$ autour du point I.

$$\delta W = \vec{F_1}\cdot\overrightarrow{\delta A} + m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta G} + \vec{F_2}\cdot\overrightarrow{\delta B} + R_D\cdot\overline{DD'} = 0 \quad (0{,}5)$$

$$\delta W = (\cos\theta\,F_1)\,\overline{AA'} - mg\cos\theta\cdot\overline{GG'} - F_2\sin\theta\cdot\overline{BB'} - R_D\cdot\overline{DD'} = 0$$

$$(1{,}5)\quad \begin{cases} \overline{AA'} = IA\cdot\delta\theta = \left(R/tg\theta + a\right)\delta\theta \\ \overline{GG'} = IG\cdot\delta\theta = (\overline{IA} - \overline{AG})\cdot\delta\theta = \left(\dfrac{R}{tg\theta} + a - L\right)\delta\theta \\ \overline{BB'} = IB\cdot\delta\theta = (\overline{AB} - \overline{AI})\cdot\delta\theta = \left(2L - \dfrac{R}{tg\theta} - a\right)\delta\theta \\ \overline{DD'} = ID\cdot\delta\theta = \left(R/tg\theta\right)\cdot\delta\theta \end{cases}$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow R_D = \frac{F_1\cos\theta\left(\dfrac{R}{tg\theta} + a\right) - mg\cos\theta\left(\dfrac{R}{tg\theta} + a - L\right) - F_2\sin\theta\left(2L - \dfrac{R}{tg\theta} - a\right)}{R/tg\theta} \quad (1)$$

UTHB

Faculté GM&GP

Licence MC

Mécanique Analytique

2015-2016

Corrigé du Contrôle Continu.

V2

7,5

1°/ Calcul $\vec{\delta A}$ et $\vec{\delta G}$

$$\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DA} = \begin{cases} R/\sin\theta + a\cos\theta \\ -a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{\delta A} = \begin{cases} \left(-\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} - a\sin\theta\right).\delta\theta \\ -a\cos\theta.\delta\theta. \end{cases}$$ 0,5 0,5

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \begin{cases} R/\sin\theta + a\cos\theta - L\cos\theta \\ -a\sin\theta + L\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{\delta G} = \begin{cases} \left[-\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} - \sin\theta(a-L)\right].\delta\theta \\ -\cos\theta(a-L).\delta\theta. \end{cases}$$ 0,5 0,5

2°/ Par le PTV, calcul de F_1

$$\delta W = \vec{F_1}.\vec{\delta A} + m\vec{g}.\vec{\delta G} + \vec{F_2}.\vec{\delta B} = -F_1.\delta x_A - mg.\delta y_G - F_2.\delta y_B = 0$$ 0,5 0,5

$$\delta W = \left[-F_1\left(-\frac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} - a\sin\theta\right) - mg\left(-\cos\theta(a-L)\right) - F_2\left(-\cos\theta(a-2L)\right)\right]\delta\theta = 0$$ 0,5

$$\Rightarrow \delta W = Q_\theta.\delta\theta = 0 \quad \delta\theta \neq 0 \Rightarrow Q_\theta = 0 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{\left[mg\cos\theta(L-a) + F_2\cos\theta(2L-a)\right]\sin^2\theta}{R\cos\theta + a\sin^3\theta}$$ 1

3°/ Calcul de la réaction R_I.

Par rotation de $\delta\theta$ autour du point D.

$$\delta W = m\vec{g}.\vec{\delta G} + \vec{R_I}.\vec{\delta I} + \vec{F_2}.\vec{\delta B} = 0 \quad \vec{F_1}.\vec{\delta A} = 0$$ 0,5

$$\delta W = -mg\cos\theta.\overline{GG'} + R_I.\overline{II'} - F_2\cos\theta.\overline{BB'} = 0 \quad F_1\sin\theta.\overline{AA'} = 0$$

0,5 $\overline{GG'} = \overline{DG}.\delta\theta = (L-a).\delta\theta$; $\overline{AA'} = a\,\delta\theta$.

0,5 $\overline{II'} = DI.\delta\theta = (R/\mathrm{tg}\theta).\delta\theta$

0,5 $\overline{BB'} = (2L-a).\delta\theta$

$$\delta W = 0 \Rightarrow R_I = \frac{\left[mg(L-a) - F_2(2L-a)\right]\sin\theta}{R} - F_1\frac{a\sin^2\theta}{R\cos\theta}.$$

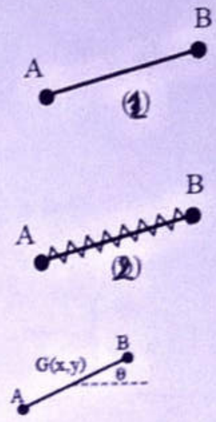
1

USTHB FGM&GP
3ème Année Licence MC

Le 06 janvier 2013
Durée : 40 mn

Interrogation de Mécanique Analytique

Exercice 1 (8pts)



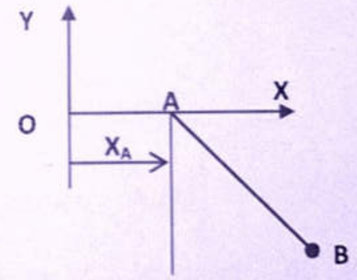
Deux points pesants A et B, de masse **m** chacun se déplacent sans frottement sur un plan horizontal OXY.
Déterminer le nombre de degrés de liberté du système, et en considérant les coordonnées **x, y** et **θ** pour écrire la fonction de Lagrange **L** et déterminer le mouvement du système à partir des équations de Lagrange :

1. si A et B sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur **L**.
2. si A et B sont reliés par un ressort linéaire de masse négligeable, de coefficient de rappel **k** et de longueur libre **l**.

En quoi le mouvement trouvé dans le **1.** change-t-il

3. si les deux points sont remplacés par une tige de masse m et de longueur **L**?

Exercice 2 (7pts)



Une tige AB de longueur **L**, de masse négligeable porte à son extrémité B une masse ponctuelle **m**. On impose au point de suspension A un mouvement horizontal de la forme $x_A = a\cos(\omega t)$, **a** et **ω** sont des constantes données.

1. Calculer la vitesse réelle et la vitesse virtuelle du point **B**.
2. En prenant un paramétrage adéquat, déterminer l'équation différentielle du mouvement du système.

A.Derouiche

USHB, FGMGP

Année Licence MC

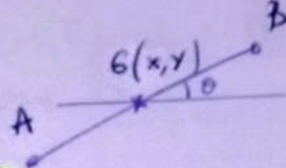
Correction de l'interrogation de Mécanique Analytique

06 Janvier 2013

A. DEROUICHE

Exercice 1 (8 pts)

Fonction de Lagrange et mouvement du système :



1/- Si A et B reliés par une tige de masse nulle. (0.25)

$m\,ddl = 2\times2-1 = 3$ (0.25) avec $k \Rightarrow \overline{AB} = L = cte$; $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = \theta$

$T = \frac{1}{2} m \overline{V^\circ(A)}^2 + \frac{1}{2} m \overline{V^\circ(B)}^2$ $\quad \overrightarrow{OA} = \begin{cases} x_A = x - \frac{L}{2}\cos\theta \\ y_A = y - \frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{cases} x_B = x + \frac{L}{2}\cos\theta \\ y_B = y + \frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$

$\overrightarrow{V^\circ(A)} = \begin{cases} \dot x + \frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta \\ \dot y - \frac{L}{2}\dot\theta\cos\theta \end{cases}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\left[\dot x^2 + \dot y^2\right] + \frac{mL^2}{4}\dot\theta^2}\ (0.5)$$

$$\begin{cases} Q_x = \sum \vec F_i \cdot \frac{\partial \overrightarrow{M_i}}{\partial x} = m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial x} + m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 & \boxed{Q_x = 0}\ (0.25) \\ Q_\theta = m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial \theta} + m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial \theta} = \{mg \cdot \begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta + \frac{L}{2}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{L}{2}\cos\theta \end{cases} = 0 \Rightarrow & \boxed{Q_\theta = 0}\ (0.25) \\ Q_y = m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial y} + m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = -2mg \Rightarrow & \boxed{Q_y = -2mg}\ (0.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot \theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} m\ddot x = 0 \longrightarrow \text{(I)}\ (0.25) \\ m\ddot y = -2mg \longrightarrow \text{(II)}\ (0.25) \\ m\frac{L^2}{2}\ddot\theta = 0 \longrightarrow \text{(III)}\ (0.25) \end{cases}$$

2°/ Si A et B sont reliés par un ressort (longueur $r(t)$)

$m\,ddl = 2\times2-0 = 4$ (0.25) $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = \theta$ et $q_4 = r$

$T = \frac{1}{2} m \overline{V^\circ(A)}^2 + \frac{1}{2} m \overline{V^\circ(B)}^2$ $\quad \overrightarrow{OA} = \begin{cases} x - \frac{r}{2}\cos\theta \\ y - \frac{r}{2}\sin\theta \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{cases} x + \frac{r}{2}\cos\theta \\ y + \frac{r}{2}\sin\theta \end{cases}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\left[\dot x^2 + \dot y^2\right] + \frac{1}{2} m\left[\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right]}\ (0.5) \quad \overrightarrow{V^\circ(A)} = \begin{cases} \dot x - \frac{\dot r}{2}\cos\theta + \frac{r\dot\theta\sin\theta}{2} \\ \dot y - \frac{\dot r}{2}\sin\theta - \frac{r\dot\theta\cos\theta}{2} \end{cases}\ (0.5)$$

de même $Q_x = 0$ $\quad Q_r = m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial r} + m\vec g \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial r} = 0$

$Q_y = 0$

$Q_\theta = 0$

les équations différentielles :

$$\begin{cases} m\ddot x = 0 \longrightarrow \text{(I)}\ (0.25) \\ m\ddot y = -2mg \longrightarrow \text{(II)}\ (0.25) \\ r^2\ddot\theta + 2r\dot r\dot\theta = 0 \longrightarrow \text{(III)}\ (0.5) \\ \frac{m}{2}\ddot r - \frac{m}{2}r\dot\theta^2 + kr = 0 \longrightarrow \text{(IV)}\ (0.5) \end{cases}$$

1/2

3°/ Si A et B ... par une tige de masse m et longueur L : $T_{tige} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V(G)}^2 + \frac{1}{2} \Omega^t I \Omega$ (0.5)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 \right)$$

$\Rightarrow$ Mouvement d'un solide et non pas de points matériels. (0.5)

Exercice 2 (7pts)

OB $V^\circ(B)$ — 1
OA $V^\circ(A)$ — 1 1

1/ Vitesse réelle et virtuelle du point B.

(a) $\overrightarrow{V^\circ(B)} = \frac{d^\circ \overrightarrow{OB}}{dt} = \sum \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ (0.5) $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{cases} x_A + L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{cases}$

(b) $\overrightarrow{V^*(B)} = \frac{\delta \overrightarrow{B}}{\delta t} = \sum \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial q_i} \dot{q}_i$ (0.5) $\quad x_A = a\cos\omega t$ (liaison).

$$\overrightarrow{V^\circ(B)} = \begin{cases} -a\omega\sin\omega t + L\dot{\theta}\cos\theta \\ +L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \ (0.5) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V^*(B)} = \begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \ (0.5)$$

2°/ $q = \theta$ car le système est à 1 ddl. (x_A connu)

$$T = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V^\circ(B)}^2 = \frac{1}{2} m \left[a^2\omega^2\sin^2\omega t - 2a\omega L\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2 \right] \ (1)$$

$$\text{et } Q_\theta = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial \theta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L\cos\theta \\ L\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{-mgL\sin\theta = Q_\theta} \ (0.5)$$

(0.5)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$ (0.5)

$$\Rightarrow \boxed{mL^2\ddot{\theta} - maL\omega^2\cos\omega t\cos\theta + mgL\sin\theta = 0} \Rightarrow \text{éq diff} \ (1)$$

$* \ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} - ma\omega L\sin\omega t\cos\theta$ (0.5) $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} - ma\omega^2 L\cos\omega t\cos\theta + ma\omega L\sin\omega t\,\dot{\theta}\sin\theta$. (0.5)

$* \ \frac{\partial T}{\partial \theta} = ma\omega L\dot{\theta}\sin\omega t\sin\theta$ (0.5)

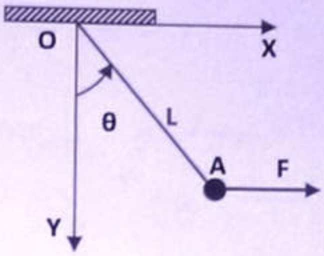
USTHB FGM&GP
3ème Année Licence MC

Le 28 novembre 2011
Durée : 40mn

Interrogation de Mécanique Analytique

Exercice 1 (pts) 7,5

Considérons un pendule simple de longueur L, de masse ponctuelle m en **A** et notons sa position par l'angle **θ** avec la verticale. Il est soumis à la force horizontale **F** (voir ci contre).



a) Donner les liaisons et de quels types sont elles ?, déduire le nombre de degré de liberté du système? 1,5

b) Par le principe des travaux virtuels, trouver la condition d'équilibre statique et déduire l'expression de F. 2

c) Donner l'équation du mouvement du pendule simple par le principe de D'Alembert, et déduire l'accélération $\ddot{\theta}$ pour de petits déplacements. 2,5 1,5

Exercice 2 (pts) 2

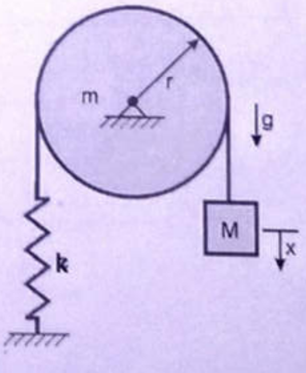
a) Que signifie la liaison **scléronome** ? 1

b) Donner l'expression de la force généralisée Q en fonction des coordonnées généralisées. 0,5

c) Qu'appelle t'on ensemble des coordonnées généralisées ? Cet ensemble est il unique?

Exercice 3 (pts) 5,5

Sur un rouleau homogène de masse **m** et de rayon **r**, passe une corde élastique inextensible (sans masse) et à laquelle sont reliés un ressort de raideur **k** et sans masse et de l'autre une masse **M**. On donne $I_{oz}=mr^2/2$.



a) Calculer la force généralisée Q_x associée à la coordonnée **x**. 1,5

b) Par le théorème de D'Alembert, déterminer l'équation de mouvement du système en prenant la coordonnée généralisée q=**x** 2,5 → 0,5

c) Calculer la fréquence naturelle du système pour de petits déplacements, et quelle est l'amplitude de vibration maximale **x0**, de sorte que la corde ne glisse pas? 1

UHB FGM&GP

1ère Année Licence MC

le 28 Novembre 2011

Correction de l'interrogation de Mécanique Analytique.

Exercice 1 : (7.5)

a/ A point materiel $\left.\begin{array}{l} x_A = L\sin\theta \\ y_A = L\cos\theta \end{array}\right| \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = L^2$ (0.5) liaison holonome ou géométrique (0.5)

mddl $= 2 - 1 = 1$ (0.5), on prend $q = \theta$

b/ PTV $\Rightarrow$ $\delta W = 0 \Rightarrow (m\vec{g} + \vec{F}).\vec{\delta A} = 0 \Rightarrow mg.\delta y_A + F\,\delta x_A = 0$ (0.5)

$[mg(-L\sin\theta) + F(L\cos\theta)]\,\delta\theta = Q_\theta.\delta\theta = 0 \quad \delta\theta \neq 0$

$\Rightarrow Q_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{-mg\sin\theta + F\cos\theta = 0}$ Condition d'$\rightleftarrows$ (1)

et $\boxed{F = mg\,tg\,\theta}$ (0.5)

c/ D'Alembert : $\delta W = \delta A$ (0.5) ; d'après b/ δW déjà fait

$q^{\text{té}}$ d'Accélération $\delta A = m\,\vec{\gamma^\circ(A)}.\vec{\delta A}$ avec $\vec{\delta A} = \begin{cases} L\cos\theta\,\delta\theta \\ -L\sin\theta\,\delta\theta \end{cases}$ (0.5)

et $m\vec{\gamma^\circ(A)}\delta A = m\begin{cases} L(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta) \\ -L(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta) \end{cases} . \begin{cases} L\cos\theta\,\delta\theta \\ -L\sin\theta\,\delta\theta \end{cases}$

Alors $\delta A = m(+L^2\ddot\theta)\,\delta\theta \Rightarrow \delta W - \delta A = 0$ (0.5) $\Rightarrow$

$\boxed{mL^2\ddot\theta + mg\sin\theta - F\cos\theta = 0}$ (1)

Si θ petit $\begin{array}{l}\sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1\end{array}$ (0.5) et l'eq devient : $mL^2\ddot\theta + mg\theta - F = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta = \dfrac{F - mg\theta}{mL^2}}$ (1)

Exercice 2 : (2)

a) liaison scléronome : $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$ holonome ou $f(q_1 \dots, q_{3N}, t) = 0$ (0.5)

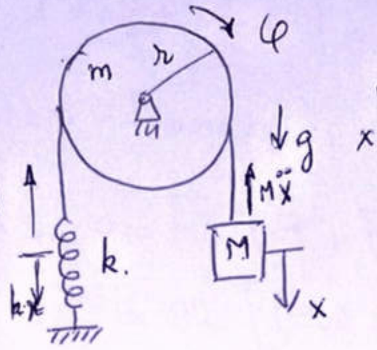
et si $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ (0.5)

A. Derouiche

b) $Q = \sum_i \vec{F_i} \frac{\partial \vec{M_i}}{\partial q_i}$ (0,5)

c/ On appelle ensemble de coordonnées généralisées tout ensemble de paramètres permettant de déterminer entièrement l'état du système. Cet ensemble est bien sûr pas unique. (0,5)

Exercice 3: (5,5)



$q = x$; $I_{oz} = \frac{mr^2}{2}$

$\frac{\partial \vec{M_c}}{\partial x} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

a) $Q_x = \sum \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{M_c}}{\partial x}$ (0,5)

$x = r\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$; $\delta\varphi = \frac{\delta x}{r}$ (0,5)

$\boxed{Q_x = -kx + Mg}$ (1)

b) D'Alembert : $\delta W = \delta A$ ou $\sum(\vec{F_i} - m_i \ddot{x})\delta x + \sum(\vec{C_i} - I\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0$ (0,5)

$(-kx + Mg - M\ddot{x})\delta x - I_{oz}\ddot{\varphi}\,\delta\varphi = 0$ (0,5) (0,5) (0,5) (0,5)

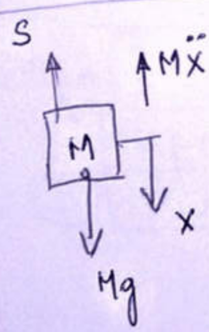
$\boxed{\left(M + \frac{m}{2}\right)\ddot{x} + kx = Mg}$ (1)

c/ fréquence naturelle du système :

l'équation de mvt est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = f$

alors la fréquence naturelle $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m/2}}}$ (1)

exclue



Le câble tenant la masse M

$S = M(g - \ddot{x})$

Si la corde lâche $\Rightarrow S = 0 \Rightarrow g = \ddot{x}_{max}$

On utilise la relation $x = X_0 \sin\omega t$

$\ddot{x} = -\omega^2 X_0 \sin\omega t$

$\ddot{x}_{max} = +\omega^2 X_0$

$\boxed{X_0 = \frac{\ddot{x}_{max}}{\omega^2} = \frac{g\left(M + m/2\right)}{k}}$ $\Longleftarrow$

A. Derouiche

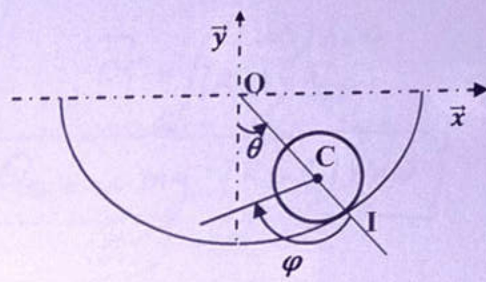
DEROUICHE

USTHB FGM&GP
3ème Année Licence MC

Samedi 02 février 2013
Durée : 1h30mn

Rattrapage de Mécanique Analytique

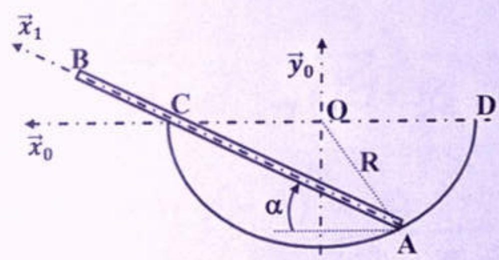
Exercice 1 (7pts)



Un disque, pesant, homogène, de masse **m** et de rayon **r**, roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon **R** > r, situé dans un plan vertical.

1. Calculer l'énergie cinétique du système.
2. Calculer la force généralisée Q_θ (ou l'énergie potentielle U).
3. Par Lagrange de 2ème espèce, établir l'équation différentielle du système en fonction de $\boldsymbol{\theta}$.
4. En déduire l'équation différentielle dans le cas des petits mouvements et donner la pulsation propre.

Exercice 2 (7pts)



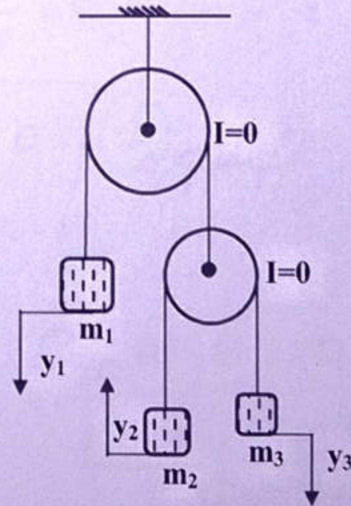
Soit la barre AB de masse **m** et de longueur L et de centre de gravité **G** reposant sans frottement sur une cavité immobile demi circulaire de rayon R.

1. Déterminer les coordonnées X_G et Y_G

Par le principe des travaux virtuels :

2. Exprimer la condition d'équilibre (donner une équation en α)
3. Calculer les réactions aux appuis **A** et **C**.

Exercice 3 (6pts)



Une machine double Atwood se compose de trois masses $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ et $\mathbf{m_3}$ connectés par des fils de masse nulle. Les fils s'enroulant sur deux poulies de masse nulle, tournent sans frottement autour des axes de symétrie. Les masses sont affectées par les forces gravitationnelles. Le mouvement est considéré avoir lieu dans la direction verticale.

Par le principe de D'Alembert :

1. Ecrire les conditions de liaison du système étudié et en déduire le nombre de degré de liberté.

2. Calculer les accélérations $\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{i}$ des masses $\mathbf{m_i}$ **(i=1,3)** du système en fonction des $\mathbf{m_i}$ et **g**.

3. Calculer ces accélérations dans le cas où on applique une force **F** à $\mathbf{m_3}$ dans la même direction.

Rattrapage

Ex1.

1/ $T = \frac{1}{2} m \overrightarrow{V^\circ(C)}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_2^{\circ\, t} \cdot I_C \cdot \vec{\Omega}_2^\circ$ (0,5)

Dans R_1 $\vec{OC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (R-r) \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$

$\overrightarrow{V^\circ(C)} = \frac{d\vec{OC}}{dt} + \vec{\Omega}_1^\circ \wedge \vec{OC} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\theta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ (R-r) \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} (R-r)\dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \overrightarrow{V^\circ(C)}}$ (0,5)

$\boxed{T = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} (\dot\varphi - \dot\theta)^2 \cdot \frac{m r^2}{2}}$ (1)

$\vec{OC} = \begin{Bmatrix} (R-r)\sin\theta \\ (R-r)\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$

2°/ $Q_\theta = m\vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \theta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (R-r)\cos\theta \\ -(R-r)\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{Q_\theta = -mg(R-r)\sin\theta}$ (0,5) (0,5)

3°/ Par Lagrange de 2ème espèce $\Rightarrow$ eq diff en fct de θ.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$. (0,5)

Exprimons T en fct de $\dot\theta$.

le roult s glmt en $I \Rightarrow \vec{V_g}(I) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V^\circ}(I)_{\mathcal{S}} - \vec{V^\circ}(I)_{\mathcal{S}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V^\circ}(C) + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{CI} = \vec{0}$

$\begin{Bmatrix} (R-r)\dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi - \dot\theta \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (R-r)\dot\theta - r(\dot\varphi - \dot\theta) = 0$.

$\Rightarrow R\dot\theta - r\dot\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \frac{R}{r}\dot\theta}$ (1)

$T = \frac{1}{2} m (R-r)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \dot\theta^2 \cdot m\frac{r^2}{2}$

$\boxed{T = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot\theta^2}$ (0,5)

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot\theta$

$\boxed{\frac{3}{2} m (R-r)^2 \ddot\theta + mg(R-r)\sin\theta = 0}$ (1) eq diff

- si θ petit $\sin\theta \approx \theta$.

$\frac{3}{2} \cancel{m} (R-r)\ddot\theta + \cancel{m} g\theta = 0 \Rightarrow \ddot\theta + \omega^2\theta = 0$. (1)

avec $\omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}(R-r)} = \frac{2}{3}\frac{g}{R-r} = \omega^2$

$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}}$ La pulsation propre

A. DERDVICHE

Exercice 2 (7pts)

1°/ X_G et Y_G

$$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \begin{cases} R\cos 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha \end{cases} + \begin{cases} \frac{L}{2}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\sin\alpha \end{cases} = \begin{cases} R\cos 2\alpha + \frac{L}{2}\cos\alpha \\ -R\sin 2\alpha + \frac{L}{2}\sin\alpha \end{cases} = \begin{cases} X_G \\ Y_G \end{cases}$$

(1)

2°/ Principe d. T.V

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\delta\vec{G} + \underbrace{\vec{R_A}\cdot\delta\vec{A}}_{0} + \underbrace{\vec{R_C}\cdot\delta\vec{C}}_{0}$$

(0,5)

$$\delta\vec{G} = \begin{cases} \left(-2R\sin 2\alpha - \frac{L}{2}\sin\alpha\right)\delta\alpha \\ \left(-2R\cos 2\alpha + \frac{L}{2}\cos\alpha\right)\delta\alpha \end{cases}$$

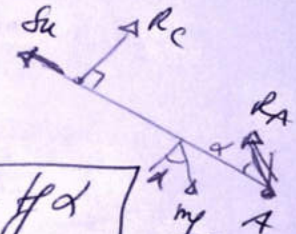
(0,5)

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\delta\vec{G} = -mg\left(-2R\cos 2\alpha + \frac{L}{2}\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4R\cos 2\alpha + L\cos\alpha = 0} \text{ ou } \boxed{8R\cos^2\alpha + L\cos\alpha - 4R = 0}$$

(1) (0,5)

3°/ R_A et R_C



* dépl virtuel de la barre le long d'elle ici de δu.

$$\delta W = \vec{R_A}\cdot\delta\vec{A} + \vec{R_C}\cdot\delta\vec{C} + m\vec{g}\cdot\delta\vec{G} = 0.$$

$$= (R_A\cos\alpha - mg\sin\alpha)\,\delta u = 0. \qquad \boxed{R_A = mg\,tg\alpha}$$

(0,5) (1)

* Calcul de R_C :

rotation de la barre autour de A.

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\delta\vec{G} + \vec{R_C}\cdot\delta\vec{C}$$

(0,5)

$$= -mg\cos\alpha\,\frac{L}{2}\,\delta\alpha + R_C\cdot 2R\cos\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

(0,5)

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{mg\cdot L}{4R}}$$

(1)

A. MEROVICHE

Exercice 3 (6pts)

Rattrapage . 2013

3/3

1°/ Liaisons et ddl

$$\delta y_1 = R\,\delta\varphi = \delta A \quad 0.25$$

$$\left\{\begin{array}{l}\delta y_2 = \delta A - r\,\delta\theta = \delta y_1 - r\,\delta\theta \\ \delta y_3 = \delta A + r\,\delta\theta = \delta y_1 + r\,\delta\theta\end{array}\right] \Rightarrow \delta y_2 + \delta y_3 = 2\,\delta y_1$$

$$\boxed{\delta y_3 = 2\delta y_1 - \delta y_2} \quad 0.5$$

$$n\,ddl = 3\times 1 - 1 = 2\,ddl. \quad 0.5 \qquad \ddot{y}_3 = 2\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2$$

$$q_1 = y_1 \quad \text{et} \quad q_2 = y_2.$$

2°/ $\sum_i (\vec{F}_i - m_i\,\ddot{\vec{r}}_i).\,\delta\vec{r}_i = 0 \longrightarrow 0.5$

0.75

$$(m_1 g - m_1\ddot{y}_1)\,\delta y_1 + (-m_2 g - m_2\ddot{y}_2)\,\delta y_2 + (m_3 g - m_3\ddot{y}_3)\,\delta y_3 = 0$$

$$(m_1 g - m_1\ddot{y}_1)\,\delta y_1 + (-m_2 g - m_2\ddot{y}_2)\,\delta y_2 + \left[m_3 g - m_3(2\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2)\right](2\delta y_1 - \delta y_2) = 0$$

$$\left[(m_1 + 2m_3)\,g - (m_1 + 4m_3)\ddot{y}_1 + 2m_3\ddot{y}_2\right]\delta y_1 + \left[(-m_2 - m_3)\,g - (m_2 - m_3)\ddot{y}_2 + 2m_3\ddot{y}_1\right]\delta y_2 = 0$$

1.5

$$\left\{\begin{array}{l} -\ddot{y}_1(m_1 + 4m_3) + 2m_3\ddot{y}_2 + (m_1 + 2m_3)\,g = 0 \longrightarrow (1) \\ -\ddot{y}_2(m_2 + m_3) + 2m_3\ddot{y}_1 - (m_2 + m_3)\,g = 0 \longrightarrow (2)\end{array}\right.$$

1.5

Si F appliquée sur $m_3 \Rightarrow$

0.5

$$\left\{\begin{array}{l} -\ddot{y}_1(m_1 + 4m_3) + 2m_3\ddot{y}_2 + m_1 + 2(m_3 + F)\,g = 0 \longrightarrow (3) \\ -\ddot{y}_2(m_2 + m_3) + 2m_3\ddot{y}_1 - (m_2 + m_3 + F)\,g = 0 \longrightarrow (4)\end{array}\right.$$

A. DEROUICHE

DEROVICHE.

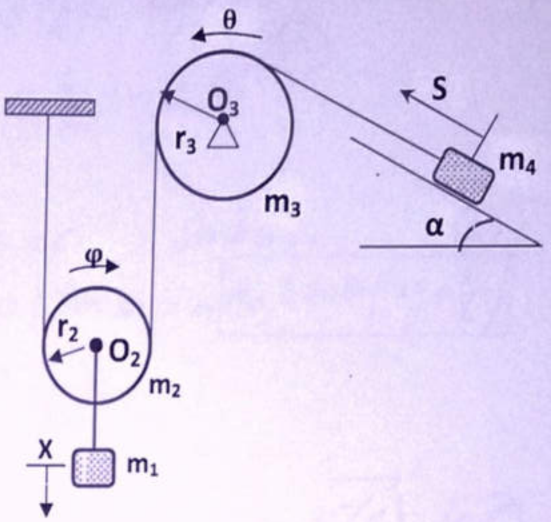
USTHB FGM&GP
3ème Année Licence MC

Le 16 janvier 2011
Durée : 1h30mn

Partiel de Mécanique Analytique

Exercice 1 (8pts)

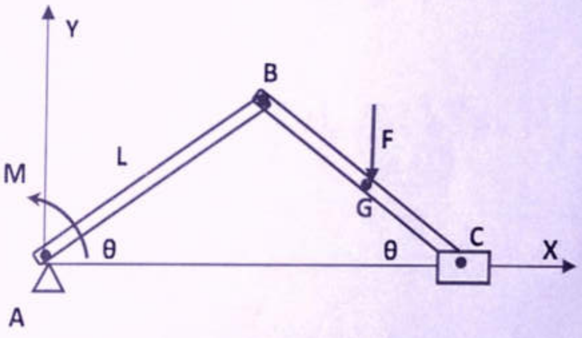
Soit le dispositif ci contre, il est constitué de la masse m_4 suspendue par un fil inextensible s'enroulant autour d'une poulie de **centre fixe** O_3 et de rayons r_3, et glisse le long du plan incliné de l'angle α. La masse m_1 est suspendue au centre O_2 de la poulie de masse m_2 et de rayons r_2.
Données : $I_{03}=m_3r_3^2$; $I_{02}=m_2r_2^2$, **f:** coefficient de frottement de la masse m_4 avec le plan incliné.



1. Exprimer les relations entre δS, $\delta\theta$, $\delta\varphi$ et δX
2. Calculer la force généralisée Q_X
3. Par le théorème de D'Alembert, déterminer l'accélération $\ddot{X}$ en fonction de m_1, m_2, m_3, m_4, r_2, r_3, g et f.

Exercice 2 (8pts)

Soit le système formé par deux barres **identiques AB et BC**, de même masse **m**, de même longueur **L** et de même moment d'inertie $I_G=mL^2/12$, articulées en **A** et en **B**. Le coulisseau **C** de masse m_C glisse le long de l'axe X. Le système est soumis à la force **F** appliquée **au milieu** de la barre BC et au Moment **M.**

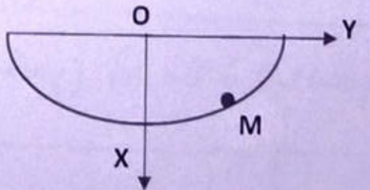


1. Par le principe des travaux virtuels, calculer le moment **M** à l'équilibre et déduire la force généralisée Q_θ.
2. Calculer l'énergie cinétique du système en fonction de **m**, m_C, **θ** et **L.**
3. Ecrire l'équation différentielle du mouvement du système en utilisant Lagrange de **2ème espèce**.

(*)

Exercice 3 (4pts)

Un point matériel **M** de masse **m** se déplace sur **la cavité elliptique** de grand axe **2a**, et de petit axe **2b**. En prenant comme coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes x et y du point M, écrire les équations différentielles du mouvement en fonction du Lagrange de **1ère espèce.**



Janvier 2015
A. BEROVICHE

Corrigé Partiel de M.A

Exercice 1 (8pts)

1°/ Relations entre δS, $\delta\theta$, $\delta\varphi$ et δx

$\delta S = r_3\,\delta\theta$

$\delta x = r_2\,\delta\varphi$

$$\begin{cases} \delta S = 2\,\delta x & (0.5) \\ \delta\theta = \dfrac{2\,\delta x}{r_3} & (0.5) \\ \delta\varphi = \dfrac{\delta x}{r_2} & (0.5) \end{cases}$$

2°/ $Q_x \rightarrow \delta W = 0 \Rightarrow Q_x\,\delta x = 0 \Rightarrow$ (0.25)

$$(-m_4 g \sin\alpha - f m_4 \cos\alpha)\cdot\delta S + (m_1 + m_2)\,g\,\delta x = 0$$ (0.5) (0.5) (0.5)

$$\left[-2m_4 g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + (m_1+m_2)\,g\right]\delta x = 0 \qquad \delta x \neq 0.$$

$$\boxed{Q_x = \left[-2m_4(\sin\alpha + f\cos\alpha) + (m_1+m_2)\right]g} \quad (1)$$

3°/ Par D'Alembert : $\ddot{x}$

(0.25) $\delta W = \delta A \rightarrow \delta A = (-m_4\ddot{S})\,\delta S - I_{O_3}\ddot{\theta}\,\delta\theta - I_{O_2}\ddot{\varphi}\,\delta\varphi - (m_2+m_1)\ddot{x}\,\delta x$ (0.25) (0.25) (0.25) (0.5)

$$= (-m_4 2\ddot{x})\,2\delta x - m_3 r_3^2\left(\frac{2\ddot{x}}{r_3}\right)\left(\frac{2\delta x}{r_3}\right) - m_2 r_2^2\left(\frac{\ddot{x}}{r_2}\right)\frac{\delta x}{r_2}$$ (0.25) (0.25) (0.25)

$$-(m_2+m_1)\ddot{x}\,\delta x$$

$\Rightarrow \delta W = \delta A \Rightarrow Q_x\cdot\delta x = \delta A$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{-2m_4(\sin\alpha + f\cos\alpha) + m_1 + m_2}{4(m_4+m_3) + 2m_2 + m_1}\,g} \quad (1.5)$$

Exercice 3 : (4pts)

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow$ (1)

L'eq de Lagrange de 1ère espèce.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial q_h} \quad (0.5)$$

$q_1 = x$; $q_2 = y$ et λ ; $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ (0.5) ; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2}$

$Q_x = mg$ (0.5) ; $Q_y = 0$ (0.5)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg + \dfrac{2\lambda x}{a^2} & (0.5) \\ m\ddot{y} = \dfrac{2\lambda y}{b^2} & (0.5) \end{cases}$$

Exercice 2 : (8pts)　　Partiel Janvier 2011　　A. BEROVICHE

1°/ PTV → Calcul de M (3.5)

$$\delta W = 0 \rightarrow M\delta\theta + m\vec{g}\cdot\vec{\delta G_1} + mg\,\vec{\delta G_2} + \vec{F}\cdot\vec{\delta G_2} + m_c\vec{g}\cdot\vec{\delta C} = 0 \quad (0.5)$$

$$M\delta\theta - mg\,\delta y_{G_1} + (mg+F)\,\delta y_{G_2} + m_c\vec{g}\cdot\overset{0}{\delta y_c} = 0$$

(0.25) (0.25) (0.5) (0.25)

$$\begin{cases} y_{G_1} = y_{G_2} = \frac{L}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad \delta y_{G_1} = \delta y_{G_2} = \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\delta\theta \quad (0.25) \\ y_c = 0 \end{cases}$$

$$\delta W = 0 \rightarrow \Big[\underbrace{M - mgL\cos\theta + F\frac{L}{2}\cos\theta}_{Q_\theta}\Big]\delta\theta = 0 \qquad \delta\theta \neq 0$$

$$\rightarrow \boxed{M = L\cos\theta\left(mg + \frac{F}{2}\right)} \quad (1)$$

et $\boxed{Q_\theta = M - L\cos\theta\left(mg+\frac{F}{2}\right)}$ (0.5)

2°/ $T = \frac{1}{2}m\,\vec{V}(G_1)^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\,\vec{V}^\circ(G_2)^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_c\,\vec{V}(C)^2$ (0.5)

$$\vec{V}^\circ(G_1) = \begin{cases} -\frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta \\ \frac{L}{2}\dot\theta\cos\theta \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{V}^\circ(G_2) = \begin{cases} -\frac{3L}{2}\dot\theta\sin\theta \\ \frac{L}{2}\dot\theta\cos\theta \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{V}^\circ(C) = \begin{cases} -2L\dot\theta\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m\frac{L^2\dot\theta^2}{4} + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\big(9\sin^2\theta + \underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}\big)\dot\theta^2 + \frac{mL^2}{12}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m_c\left(4L^2\dot\theta^2\sin^2\theta\right)$$

(0.25) (0.25) (0.25) (0.25)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}L^2\dot\theta^2\left[\frac{2}{3}m + 2(m+2m_c)\sin^2\theta\right]} \quad (0.5)$$

3°/ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) = 2L^2\ddot\theta\left(\frac{m}{3} + (m+2m_c)\sin^2\theta\right) + 2L^2\dot\theta^2(m+2m_c)\sin 2\theta$

(0.5) (0.5)

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 2L^2\dot\theta^2(m+2m_c)\sin\theta\cos\theta \quad (0.5)$$

L'équation différentielle en θ est :

$$\boxed{\begin{aligned} &2L^2\ddot\theta\left(\frac{m}{3} + (m+2m_c)\sin^2\theta\right) + L^2\dot\theta^2(m+2m_c)\sin 2\theta = \\ &M - L\cos\theta\left(mg+\frac{F}{2}\right) \end{aligned}} \quad (1)$$

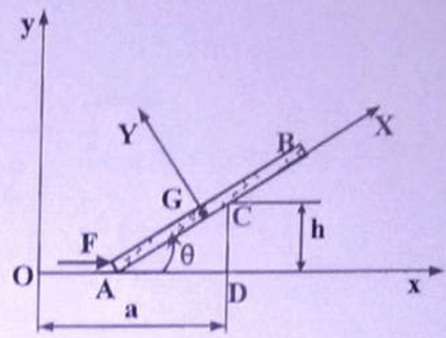
USTHB, FGM&GP
$3^{ème}$ Année Licence MC

Samedi 11 Janvier 2014
Durée : 1h30mn

Partiel de Mécanique Analytique

Exercice 1 (6pts)

Une barre AB de longueur **2L** et de masse **m** glisse sans frottement sur le point C d'une marche d'escalier et sur le sol au point A. Une force **F** est appliquée au point A. On donne OD=a.



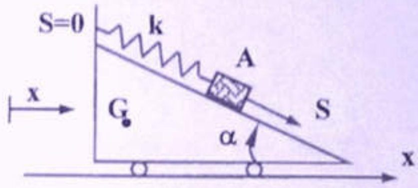
1. Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du point G.

Par le principe des travaux virtuels :

2. Exprimer la condition d'équilibre de la barre AB (donner une équation en θ)
3. Calculer les réactions aux appuis **A** et **C**.

Exercice 2 (8pts)

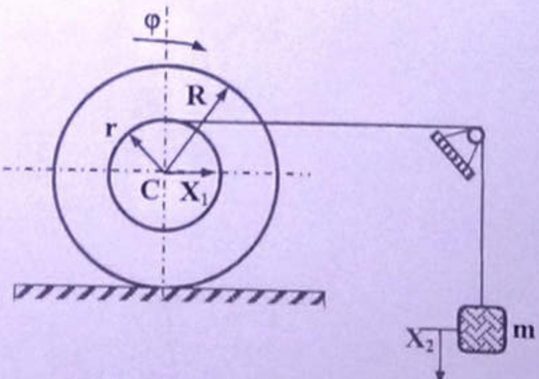
Soit le système constitué d'une masse **m** glissant sans frottement sur un plan incliné de masse **M** et d'angle d'inclinaison α. La masse **m** est reliée à un ressort de masse nulle, de constante élastique **k** et de longueur au repos $l_0=0$ et il est fixé à l'origine S=0 de l'axe S. L'axe S est placé le long de la pente du plan incliné et il bouge avec lui. Le plan incliné se déplace sans frottement le long de l'axe *x*.



1. Montrer que le système est à deux degrés de liberté.
2. Calculer les forces généralisées Q_x et Q_S.
3. Calculer l'énergie cinétique du système et par Lagrange de $2^{ème}$ espèce, écrire les équations différentielles du mouvement du système.
4. Résoudre les équations du mouvement avec les conditions initiales $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, $S(0)=0$, $\dot{S}(0)=0$.

Exercice 3 (6pts)

Une roue à gorge de masse **m**, de moment d'inertie I_C et de rayon **R** et **r**, roule sans glisser sur un plan horizontal sous l'action d'une masse **m** qui se déplace verticalement par le biais d'un fil inextensible passant sur la gorge d'une poulie fixe de masse négligeable et qui s'enroule sur la gorge de rayon **r**.



1. Montrer que le système est à un degré de liberté et trouver les relations entre δX_1, δX_2 et $\delta\varphi$.
2. Par le principe de D'Alembert, trouver l'équation différentielle de mouvement et déduire l'accélération $\ddot{X}_2$ de la masse **m**.

A. DEROUICHE

STHB, FGMGP

3ème Année Licence MC

Corrigé du Partiel de Mécanique Analytique

11-01-2014

A. DEROUICHE

Exercice 1 (7 pts)

1°/ Coordonnées x_G et y_G

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \boxed{\begin{cases} a - h\cot\theta + L\cos\theta \\ L\sin\theta \\ 0 \end{cases} = \overrightarrow{OG}}$$

avec $\overline{DA} = h/\tan\theta = h\cot\theta$ (1)

2°/ Par le Principe des travaux virtuels :

Exprimons la condition d'équilibre (0,5)

$$\delta W = (\vec{F} + \vec{R_A})\cdot\overrightarrow{\delta A} + m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta G} + \vec{R_C}\cdot\overrightarrow{\delta C} = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \vec{R_A}\cdot\overrightarrow{\delta A} = 0 \\ \vec{R_C}\cdot\overrightarrow{\delta C} = 0 \end{cases}$$

$$= \vec{F}\cdot\overrightarrow{\delta A} + m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta G} = F.\delta x_A - mg.\delta y_G = 0$$

$$\delta x_A = \left(\frac{h}{\sin^2\theta} - L\sin\theta\right)\delta\theta \quad (0,5) \quad \text{et} \quad \delta y_G = L\cos\theta.\delta\theta$$

$$\delta W = \left(F.\frac{h}{\sin^2\theta} - mgL\cos\theta\right)\delta\theta = Q_\theta.\delta\theta = 0 \qquad \delta\theta \neq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{Fh - mgL\cos\theta.\sin^2\theta = 0} \rightarrow \text{équation d'équilibre en } \theta. \quad (1)$$

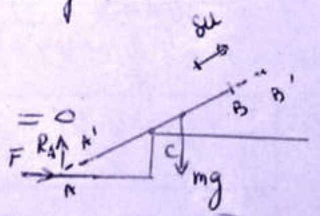
3°/ Calcul de R_A et de R_C

ⓐ– calcul de R_A par translation de la barre AB, le long d'elle même

$$\delta W = 0 \Rightarrow (\vec{F} + \vec{R_A})\cdot\vec{\delta u} + m\vec{g}\cdot\vec{\delta u} = 0$$

(0,5) $(F\cos\theta + R_A\sin\theta - mg\sin\theta).\delta u = 0 \rightarrow Q_u.\delta u = 0$

$$\Rightarrow Q_u = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = mg - F\cot\theta} \quad (1)$$

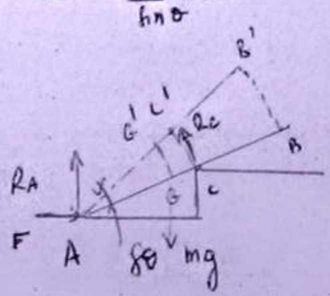


ⓑ. Calcul de R_C par rotation de $\delta\theta$ autour du point A : (2,5)

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta G} + \vec{R_C}\cdot\overrightarrow{\delta C} = 0 \quad \text{où} \begin{cases} \overline{\delta G} = \overline{GG'} = L\,\delta\theta \\ \overline{\delta C} = \overline{CC'} = \frac{h}{\sin\theta}.\delta\theta \end{cases}$$

(0,5) $$\delta W = \left(-mg\cos\theta.L + R_C.\frac{h}{\sin\theta}\right).\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{mgL\sin\theta\cos\theta}{h}} \quad (1)$$



(0,5)

USTHB, FGMSGP
3ème Année Licence MC

Corrigé du Partiel de Mécanique Analytique

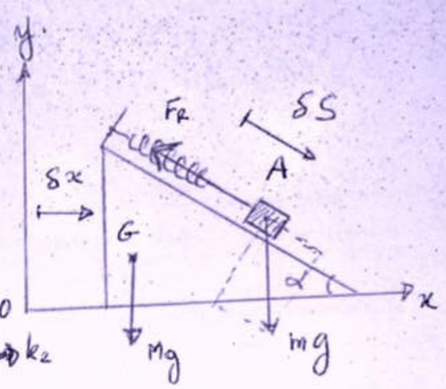
11-01-2

A. DEROUIC

Exercice 2 (7pts)

1°/ Nombre de degrés de liberté n :

Système = 2 pts matériels (M, m)



Pour M $\longrightarrow \vec{OG} = \begin{cases} x_G = x \\ y_G = cte \to k_1 \end{cases}$ (0.5)

pour m $\longrightarrow \vec{OA} = \begin{cases} x_A = x + S\cos\alpha \\ y_A = -S\sin\alpha \end{cases} \to x_A^2 + y_A^2 \Rightarrow k_2$ (0.5)

$n_{ddl} = 2 \times 2 - 2 = 2$ (0.5) $q_1 = x \; ; \; q_2 = S$

2°/ Calcul des forces généralisées Q_x et Q_S $\longrightarrow \delta q_1 = \delta x$ et $\delta q_2 = \delta S$

$\delta W = Q_x\,\delta x + Q_S \cdot \delta S$ ou

$U = \frac{1}{2} k S^2 - mg\sin\alpha \cdot S$ et $\boxed{Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0}$ (0.5)

$$\boxed{Q_S = -\frac{\partial U}{\partial S} = -kS + mg\sin\alpha}$$ (0.5)

3°/ Énergie cinétique et éqs de mvt

$T = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V^\circ(G)}^2 + \frac{1}{2} m \overrightarrow{V^\circ(A)}^2$ avec $\overrightarrow{V^\circ(G)} = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ et $\overrightarrow{V^\circ(A)} = \begin{cases} \dot{x} + \dot{S}\cos\alpha \\ -\dot{S}\sin\alpha \\ 0 \end{cases}$ (0.5)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left[\dot{S}^2 + 2\dot{x}\dot{S}\cos\alpha\right]}$$ (1)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{S}\cos\alpha \; ; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{S}\cos\alpha \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \end{cases} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = m(\dot{S} + \dot{x}\cos\alpha) \; ; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) = m(\ddot{S} + \ddot{x}\cos\alpha) \\ \frac{\partial T}{\partial S} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ddot{S}\cos\alpha = 0 \longrightarrow (I) \\ m(\ddot{S} + \ddot{x}\cos\alpha) + kS - mg\sin\alpha = 0 \longrightarrow (II) \end{cases}}$$ (1) (1)

4°/ (II) × cosα et (I) − (II).cosα $\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{-mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m-m(1-\sin^2\alpha)}} = \frac{-g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + M/m}$

(0.5)

et $\boxed{\ddot{S} = \frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha}\, g\sin\alpha}$ (0.5)

USTHB
3ème Année Licence MC /B, FGM & GP

Corrigé du Partiel de Mécanique Analytique

11-01-2014

A. DEROUICHE

Exercice 3 (6 pts)

1°/ n ddl et relations entre δx_1, δx_2 et $\delta\varphi$

Système = roue + masse

masse $m \rightarrow y_2 = 0 \rightarrow k_1 \rightarrow$ (0,5)

roue $(m, r, R) \rightarrow \begin{cases} y_C - R = 0 \rightarrow k_2 \\ \vec{V}_g(I) = \vec{0} \rightarrow k_3 \quad (\vec{V}(C) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = \vec{0}) \rightarrow \dot{x}_1 - R\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$ (0,5)

(0,5) $\Rightarrow \boxed{\delta x_1 = R\,\delta\varphi} \rightarrow k_3$

Par le principe de la poulie :

$\boxed{\delta x_2 = (R + r)\cdot\delta\varphi} \rightarrow k_4 \rightarrow$ (0,5)

$\boxed{n\ \text{ddl} = 3 + 2 - 4 = 1\ \text{ddl}}$ (0,5) $q = x_1$ ou x_2 ou φ (le choix $q = x_2$)

2°/ Par le principe de D'Alembert, donnant l'équation différentielle de mouvement :

(0,5)

$\delta W = \delta A$ ou $\delta W - \delta A = 0 \Rightarrow$

$(mg - m\ddot{x}_2)\,\delta x_2 - I\ddot{\varphi}\,\delta\varphi + (0 - m\ddot{x}_1)\,\delta x_1 = 0$

$(mg - m\ddot{x}_2)\,\delta x_2 - I\left(\dfrac{\ddot{x}_2}{R+r}\right)\left(\dfrac{\delta x_2}{R+r}\right) - m\left(\dfrac{R}{R+r}\right)\ddot{x}_2\left(\dfrac{R}{R+r}\right)\delta x_2 = 0$ (0,5) (0,5) (0,5)

$-\left[\ddot{x}_2\left(m + \dfrac{I}{(R+r)^2} + \dfrac{mR^2}{(R+r)^2}\right) + mg\right]\delta x_2 = 0 \qquad \delta x_2 \neq 0.$

$\ddot{x}_2\left(m + \dfrac{I}{(R+r)^2} + \dfrac{mR^2}{(R+r)^2}\right) - mg = 0 \rightarrow$ éq diff de mvt

et $\boxed{\ddot{x}_2 = \dfrac{m(R+r)^2}{m(R+r)^2 + I + mR^2}\,g}$ (1)

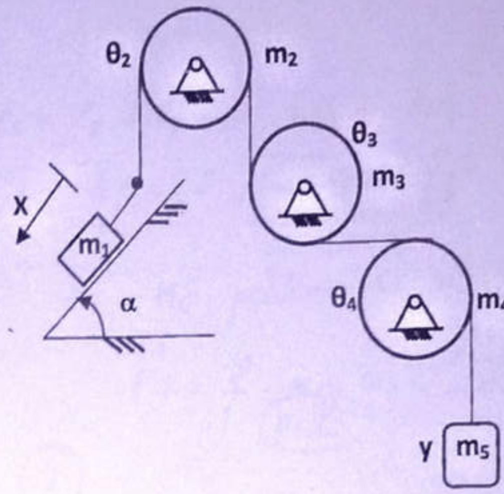
USTHB FGM&GP
3ème Année Licence MC

Dimanche 22 Janvier 2012
Durée : 1h30mn

Rattrapage de Mécanique Analytique

Exercice 1 (6pts)

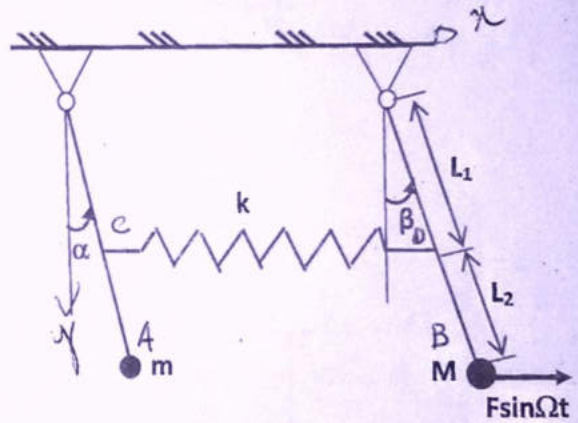
Soit le dispositif illustré ci contre, il est constitué de trois poulies fixes et de deux masses **m_1** et **m_5** suspendues par des fils inextensibles s'enroulant autour des poulies **2, 3** et **4**, **m_1** glisse le long du plan incliné de l'angle **α**. Les poulies sont de masse **m_2, m_3** et **m_4** et de rayons **r_2, r_3** et **r_4**.
Données : $I_{02}=m_2r_2^2$; $I_{03}=m_3r_3^2$ $I_{04}=m_4r_4^2$, **f**: coefficient de frottement de la masse **m_1** avec le plan incliné.



1. Exprimer les relations entre **δX**, les **$\delta\theta_i$**, et **δy**
2. Calculer la force généralisée Q_X
3. Par le théorème de D'Alembert, déterminer l'accélération $\ddot{X}$ en fonction de **m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, r_2, r_3, r_4, g, α** et **f**.

Exercice 2 (7pts)

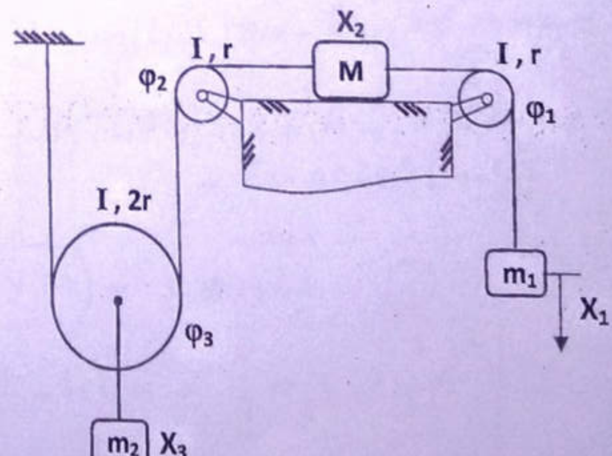
Aux extrémités de deux pendules de longueur totale **L_1+L_2**, de masse négligeable sont accrochées deux masses ponctuelles **m** et **M**. Les deux pendules sont reliés par un ressort de rigidité **k** dont la position au repos correspond à la position verticale des pendules. La masse M est soumise à une force sinusoïdale **$F\sin\Omega t$**.



1. Montrer que le système est à deux degrés de liberté.
2. Ecrire les forces généralisées Q_α et Q_β.
3. Ecrire les équations de mouvement du système en utilisant les équations de Lagrange de 2ème espèce.
4. Déduire ces équations dans le cas des petites oscillations.

Exercice 3 (7pts)

Le système ci-contre, est constitué de deux poulies (moment d'inertie **I**, rayon **r**), d'une autre roue (moment d'inertie **I**, rayon **2r**) et de trois masses (**m_1, m_2**, et **M**). La surface d'appui de la masse **M**, a le coefficient de frottement **f**. Les différents corps sont reliés par une corde sans masse, rigide et inextensible. **$m_1=m_2=m$, M=2m, $I_{Oi}=mr_i^2/2$, f**



1. Donner les relations entre **δX_1, δX_2, δX_3, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$**
2. Par le principe de D'Alembert, trouver l'accélération de la masse **M**.

UHB FGM&GP

Année Licence MC

Dimanche 22/01/20

Corrigé Rattrapage de Mécanique Analytique

Exercice 1 : (6pts)

1°/ Relations δx, $\delta\theta_i$ et δy

$\delta x = r_2\,\delta\varphi_2 \Rightarrow \boxed{\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{r_2}}$; $r_2\,\delta\varphi_2 = r_3\,\delta\varphi_3 \rightarrow \boxed{\delta\varphi_3 = \frac{\delta x}{r_3}}$

$r_4\,\delta\varphi_4 = r_3\,\delta\varphi_3 \Rightarrow \boxed{\delta\varphi_4 = \frac{\delta x}{r_4}}$ et $\boxed{\delta y = r_4\,\delta\varphi_4 = \delta x}$ (1)

2°/ $Q_x = (m_1\vec{g} + \vec{F}_f)\cdot\frac{\partial \vec{M_1}}{\partial x} + m_5\vec{g}\cdot\frac{\partial \vec{M_5}}{\partial x}$ (0,5) M_1 et M_5 positions de m_1 et m_5

$\vec{F}_f = f\cdot m_1 g\cos\alpha\cdot\vec{x}$ (0.25)

$Q_x = (m_1 g\sin\alpha - f m_1 g\cos\alpha) - m_5 g.$

$\boxed{Q_x = [(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,m_1 - m_5]\cdot g}$ (1)

3°/ $\delta W = \delta A \Rightarrow Q_x\cdot\delta x = \delta A$? (0,5)

(1,25)

$\delta A = -m_1\ddot{x}\cdot\delta x - I_{O_2}\ddot{\varphi}_2\,\delta\varphi_2 - I_{O_3}\ddot{\varphi}_3\,\delta\varphi_3 - I_{O_4}\ddot{\varphi}_4\,\delta\varphi_4 - m_5\ddot{y}\,\delta y$

$\delta A = (-m_1\ddot{x} - m_2\ddot{x} - m_3\ddot{x} - m_4\ddot{x} - m_5\ddot{x})\,\delta x$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,m_1 - m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}\,g}$ (1.5)

Exercice 2 : 1/ 2 pts matériels m et M $\longrightarrow$ $\begin{cases} x(m) = (L_1+L_2)\sin\alpha \\ y(m) = (L_1+L_2)\cos\alpha \end{cases}$ (1) $L_1 + L_2 = cte$

$\boxed{m\,ddl = 2\times 2 - 2 = 2}$ $\begin{cases} x(M) = (L_1+L_2)\sin\beta \\ y(M) = (L_1+L_2)\cos\beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha \rightarrow q_1 \\ \beta \rightarrow q_2 \end{cases}$

2°/ (0,5) (1)

$Q_\alpha = m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial\alpha} + \vec{F}_{R_1}\cdot\frac{\partial\vec{C}}{\partial\alpha} + (\vec{F}_s + M\vec{g})\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial\alpha} + \cancel{\vec{F}_{R_2}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial\alpha}} = -mg(L_1+L_2)\sin\alpha - kL_1^2(\sin\beta - \sin\alpha)\cos\alpha$

(1)

$Q_\beta = \cancel{m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial\beta}} + \cancel{\vec{F}_{R_1}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial\beta}} + (\vec{F}_s + M\vec{g})\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial\beta} + \vec{F}_{R_2}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial\beta} = -Mg(L_1+L_2)\sin\beta + kL_1^2(\sin\beta - \sin\alpha)\cos\beta - F\sin\Omega t\cos\beta\,(L_1+L_2)$

3°/ $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\alpha} = Q_\alpha \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\beta} = Q_\beta \end{cases}$

$(\vec{F}_s = \vec{F}\sin\Omega t)$

$T = \frac{1}{2}m\,\vec{V}^\circ(A)^2 + \frac{1}{2}M\,\vec{V}^\circ(B)^2$ (1)

$\boxed{T = \frac{1}{2}m(L_1+L_2)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}M(L_1+L_2)^2\dot{\beta}^2}$

A. Derouiche

Rattrapage Janvier 2012

$$\Rightarrow \begin{cases} m(L_1+L_2)^2\ddot{\alpha} - kL_1^2\cos\alpha\,(\sin\beta-\sin\alpha) + mg(L_1+L_2)\sin\alpha = 0 & (1) \\ M(L_1+L_2)^2\ddot{\beta} + kL_1^2\cos\beta\,(\sin\beta-\sin\alpha) + Mg(L_1+L_2)\sin\beta = F\sin\Omega t\,(L_1+L_2)\cos\beta & (1) \end{cases}$$

4°/ si $\begin{cases}\alpha \text{ petit} & \sin\alpha\simeq\alpha & \cos\alpha = 1\\ \beta \text{ petit} & \sin\beta\simeq\beta & \cos\beta = 1\end{cases}$

les équations deviennent :

$$\begin{cases} m(L_1+L_2)\ddot{\alpha} - kL_1^2(\beta-\alpha) + mg(L_1+L_2).\alpha = 0 & (0{,}5) \\ M(L_1+L_2)\ddot{\beta} + kL_1^2(\beta-\alpha) + Mg(L_1+L_2).\beta = F(L_1+L_2).\sin\Omega t. & (0{,}5) \end{cases}$$

Exercice 3 (7pts)

1°/ $\delta x_1 = r\,\delta\varphi_1 = \delta x_2 = r\,\delta\varphi_2 \longrightarrow \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x_2}{r}$, $\delta x_1 = \delta x_2$

$\delta x_3 = \dfrac{\delta x_2}{2} = 2r\,\delta\varphi_3 \longrightarrow \delta\varphi_3 = \dfrac{\delta x_2}{4r}$ (1,5)

2°/ Par d'Alembert, $\ddot{x}_2$?

$\delta W = \delta A$ ou $\sum_i(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \sum(C_i - I_{0i}\ddot{\varphi}_i)\,\delta\varphi_i = 0$ (0,5)

$$(m_1 g - m_1\ddot{x}_1)\,\delta x_1 - I_{01}\ddot{\varphi}_1\,\delta\varphi_1 + (-fMg - M\ddot{x}_2)\,\delta x_2 - I_{02}\ddot{\varphi}_2\,\delta\varphi_2 + \left(m_2 g + \frac{I_{03}}{2r^2}g - \left(m_2+\frac{I_{03}}{2r^2}\right)\ddot{x}_3\right)\delta x_3 - I_{03}\ddot{\varphi}_3\cdot\delta\varphi_3 = 0 \quad (2.75)$$

$$\left[m_1 g - m_1\ddot{x}_2 - I_{01}\frac{\ddot{x}_2}{r^2} - fMg - M\ddot{x}_2 - I_{02}\frac{\ddot{x}_2}{r^2} + m_2 g + \frac{I_{03}}{2r^2}g - \left(m_2+\frac{I_{03}}{2r^2}\right)\ddot{x}_2 - I_{03}\frac{\ddot{x}_2}{4r^2}\right]\delta x_2 = 0 \Longrightarrow \quad (0.75)$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 = \frac{m_1 - fM + m_2 + \frac{I_{03}}{4r^2}}{m_1 + M + m_2 + \frac{I_{01}}{r^2} + \frac{I_{02}}{r^2} + \frac{I_{03}}{4r^2}}\,g} \quad (1)$$

si $m_1 = m_2 = m$; $M = 2m$ $I_{0i} = m r_i^2/2$

$$\boxed{\ddot{x}_2 = \frac{2m(1-f) + \frac{I_{03}}{4r^2}}{4m + (I_{01} + I_{02} + I_{03})/r^2}\,g} \quad (0{,}5)$$

A. Derouiche

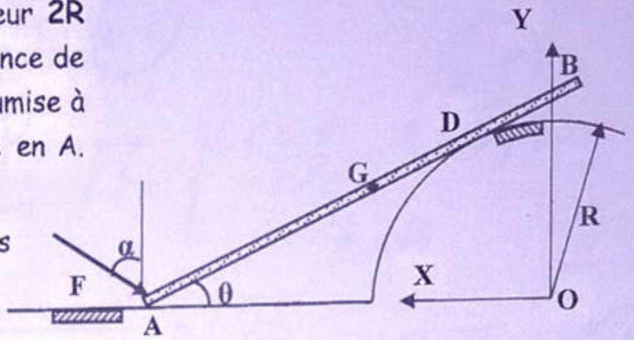
USTHB, FGM&GP
3ème Année Licence MC

Lundi 12 Janvier 2015
Durée : 1h30mn

Partiel de Mécanique Analytique

Exercice 1 (08 points)

Une barre **AB** homogène de masse **M** et de longueur **2R** repose sur le sol en **A** et sur une demi-circonférence de rayon **R** au point **D**. A ses extrémités, elle est soumise à la force **F** faisant l'angle **α=60°** avec la verticale en A. Les frottements sont négligés.



1. Calculer les déplacements virtuels des points A et G ($\overrightarrow{\delta A}$ *et* $\overrightarrow{\delta G}$)

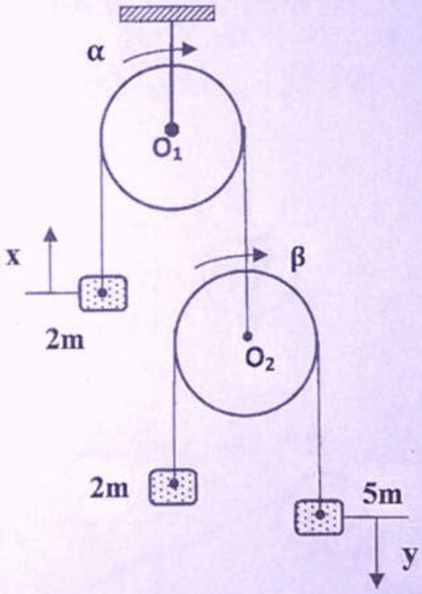
Par le principe des travaux virtuels :

2. Donner l'équation d'équilibre en θ, et déduire la valeur de θ.
3. Calculer les réactions aux appuis **A** et **D**.

Exercice 2 (07 points)

Une poulie fixe de masse **4m**, de rayon R_1 et de centre O_1, peut tourner autour de son axe. A ses extrémités, une particule de masse **2m** et une poulie mobile de masse **m**, de rayon R_2 et de centre O_2 sont attachées. Deux masses de **2m** et **5m** sont suspendues à cette poulie mobile.

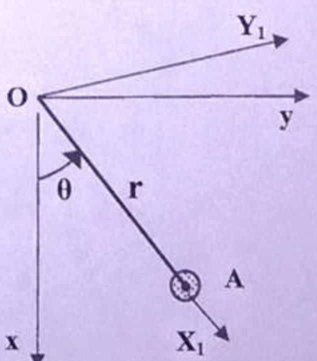
Le système est en mouvement plan vertical. Les frottements sont négligés. On donne : $I_{oi} = m_i R_i^2$



1. Trouver les relations entre les accroissements généralisés **δx, δy, δα et δβ**.
2. Calculer les forces généralisées Q_x et Q_y.
3. Calculer l'énergie cinétique du système.
4. Par Lagrange de 2ème **espèce**, écrire les équations différentielles du mouvement du système.

Exercice 3 (05 points)

Soit le pendule simple de la figure ci-contre, il est articulé en O, et il est constitué d'une masse ponctuelle **m** en A. Considérant les coordonnées généralisées **r** et θ, et par **D'Alembert**, établir **les équations différentielles** de mouvement du pendule. Déduire $\ddot{\theta}$ pour **r** =R=Cte.



NB : Il est conseillé de projeter sur R_1

FGMSGP
Licence MC

Lundi 12-01-2015

Correction du partiel de Mécanique Analytique

Exercice 1 (8pts)

1°/ Calcul de $\vec{\delta A}$ et $\vec{\delta G}$

$\vec{OA} = \begin{cases} R/\sin\theta \\ 0 \end{cases}$ (0,5) $\Rightarrow \vec{\delta A} = \begin{cases} -\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\delta\theta \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \begin{cases} R/\sin\theta - R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{cases}$ (0,5) $\Rightarrow \vec{\delta G} = \begin{cases} \left(-\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} + R\sin\theta\right)\cdot\delta\theta \\ R\cos\theta\cdot\delta\theta \end{cases}$ (0,5)

2°/ Equation d'équilibre en θ et Calcul de θ ; $\alpha = 60°$

$\delta W = \vec{Mg}\cdot\vec{\delta G} + \vec{F}\cdot\vec{\delta A} + \vec{R_A}\cdot\vec{\delta A} + \vec{R_D}\cdot\vec{\delta D} = 0$ (0,5) avec $\begin{cases} \vec{R_A}\cdot\vec{\delta A} = 0 \\ \vec{R_D}\cdot\vec{\delta D} = 0 \end{cases}$ (0,5)

$\delta W = -Mg\cdot\delta y_G + \vec{F}\cdot\vec{\delta A} = -Mg\,R\cos\theta\,\delta\theta + \begin{cases} -F\sin\alpha \\ -F\cos\alpha \end{cases}\cdot\begin{cases} -\dfrac{R\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0 \end{cases}\delta\theta = 0$ (0,5) (0,5)

$\delta W = \left[-Mg\,R\cos\theta + F R\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\cdot\delta\theta = Q_\theta\cdot\delta\theta = 0 \quad \delta\theta \neq 0$

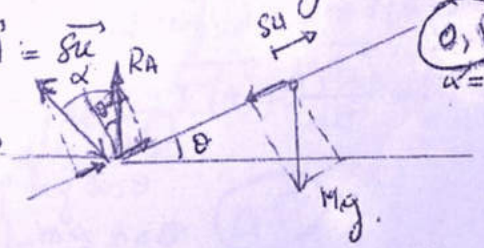
$\Rightarrow Q_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{-Mg\sin^2\theta + F\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0}$ (0,5)

$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{F}{Mg}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{F}{Mg}}\right)}$ (0,5)

3°/ Calcul de R_A et R_D

a/ calcul de R_A par translation de δu le long de AB.

$\delta W = \vec{R_A}\cdot\vec{\delta A} + \vec{Mg}\cdot\vec{\delta G} + \vec{F}\cdot\vec{\delta A} \qquad \vec{\delta A} = \vec{\delta u}$



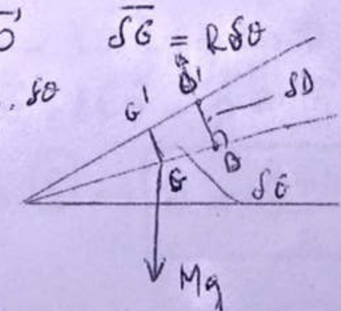
(0,5)

$\left[R_A\sin\theta - Mg\sin\theta + F\sin(\alpha-\theta)\right]\delta\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_A = Mg - F\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\theta}}$ (1)

b/ calcul de R_D par rotation de $\delta\theta$ autour de A.

$\delta W = \vec{Mg}\cdot\vec{\delta G} + \vec{R_D}\cdot\vec{\delta D}$ $\qquad \begin{cases} \vec{\delta A} = \vec{0} \\ \delta D = \dfrac{R}{tg\theta}\cdot\delta\theta \end{cases} \qquad \delta G = R\delta\theta$



(0,5)

$\delta W = -Mg\cos\theta\cdot R\,\delta\theta + R_D\cdot\dfrac{R}{tg\theta}\cdot\delta\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_D = Mg\cdot\sin\theta}$ (1)

A. DEROUICHE

/GM SGP

Année Licence MC

Lundi 12-01-2015

Correction du Partiel de MA

Exercice 2 (7pts)

1°/ Relations entre δx, δy, $\delta\alpha$ et $\delta\beta$

$\delta x = R_1 . \delta\alpha$ (0,5) $\quad \delta O_2 = \delta x \; ; \quad \delta C_{(\text{masse } 2m)} = \delta x - \delta y$. (0,5)

$\delta y = R_2 . \delta\beta$ (0,5) $\quad \delta D_{(\text{masse } 5m)} = \delta x + \delta y$. (0,5)

2°/ Calcul Q_x et Q_y

$$\delta W = \sum_i \vec{F_i} . \vec{\delta M_i} = -2mg . \delta x + mg\,\delta x + 2mg(\delta x - \delta y) + 5mg(\delta x + \delta y)$$ (0,5)

$$\delta W = Q_x . \delta x + Q_y . \delta y = 6mg . \delta x + 3mg . \delta y .$$

$\boxed{Q_x = 6mg}$ (0,5) $\quad \boxed{Q_y = 3mg}$ (0,5)

3°/ Calcul de l'énergie cinétique : $\quad R_1\dot\alpha = \dot x$ et $R_2\dot\beta = \dot y$

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot x^2 + \frac{1}{2}(4m)R_1^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}m R_2^2\dot\beta^2 + \frac{1}{2}(2m)(\dot x - \dot y)^2 + \frac{1}{2}5m(\dot x + \dot y)^2$$ (1,25)

$$\boxed{T = m\left(7\dot x^2 + 4\dot y^2 + 3\dot x\dot y\right)}$$ (0,75)

4°/ Eqs diff de mvt par Lagrange 2e espèce :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot x}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot y}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial y} = Q_y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 14\ddot x + 3\ddot y - 6mg = 0 & (1) \\ 8\ddot y + 3\ddot x - 3mg = 0 & (1) \end{cases}$$

Exercice 3 (5pts) par D'Alembert

$\delta W = \delta A \Rightarrow m\vec g . \vec{\delta A} = m\vec\gamma(A) . \vec{\delta A}$ (0,5)

$$\vec{OA} = \begin{cases} r \\ 0 \end{cases}_{R_1} \quad \vec{V^\circ(A)}_{/R_1} = \frac{d'\vec{OA}}{dt} + \vec\Omega_1^\circ \wedge \vec{OA} = \begin{cases} \dot r \\ r\dot\theta \end{cases}_{R_1}$$ (0,5) $$\vec{\gamma^\circ(A)} = \frac{d'\vec{V^\circ(A)}}{dt} + \vec\Omega_1 \wedge \vec{V^\circ(A)}$$

$$\vec{\gamma^\circ(A)}_{/R_1} = \begin{cases} \ddot r - r\dot\theta^2 \\ r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \end{cases}_{R_1}$$ (0,5) $$m\vec g_{/R_1} = \begin{cases} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{cases}$$ (0,5)

D'où les équations différentielles

$$\begin{cases} mg\cos\theta = m(\ddot r - r\dot\theta^2) & (1) \\ -mg\sin\theta = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) & (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot r - r\dot\theta^2 - g\cos\theta = 0 \to (I) \\ r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - g\sin\theta = 0 \to (II) \end{cases}$$

Si $r = R = cte \Rightarrow \dot r = 0 ; \ddot r = 0 \Rightarrow (II) \Rightarrow \boxed{\ddot\theta = -\dfrac{g\sin\theta}{R}}$ (1)

A. DEROUICHE

/

USTHB FGM&GP
$3^{ème}$ Année Licence MC

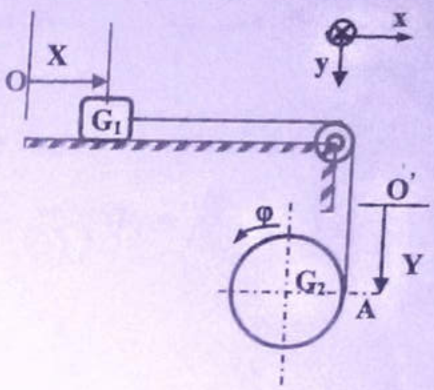
M^me DEROUICHE

Mercredi 29 janvier 2014
Durée : 1h30mn

Rattrapage de Mécanique Analytique

Exercice 1 (8pts)

Soit le système constitué d'un bloc de masse m_1 de centre G_1 glissant sur le plan horizontal de coefficient de frottement **f**. le bloc est relié par le biais d'un fil inextensible sans masse à un cylindre de centre G_2 de rayon **R** et de masse m_2. $I_{G2Z}=m_2R^2/2$ et on pose $X=X_{G1}$, $Y=Y_{G2}$

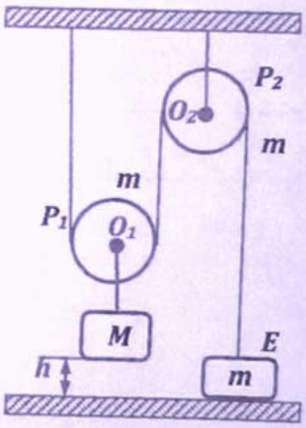


1. Exprimer les équations de liaison, donner le nombre de degrés de liberté et déduire les relations entre $\delta\varphi$, δY et δX.
2. Calculer l'énergie cinétique du système et les forces généralisées Q_X et Q_Y.
3. Par Lagrange de $2^{ème}$ espèce, établir les équations différentielles du système en fonction de **X et Y.**
4. En déduire les expressions de $\ddot{X}$ et $\ddot{Y}$.

Exercice 2 (7pts)

Soient les deux poulies identiques P_1 et P_2 (masse m, rayon **R** et moment d'inertie $J=mR^2/2$). Le centre O_2 de P_2 est fixe et un fil relie les deux poulies. Ce fil ne glisse pas sur les poulies, il est tendu par la masse m (identique à celles des poulies) accrochée à son extrémité E. Au centre O_1 de P_1 est accrochée la masse $M=\alpha$ m (α est un coefficient positif) par un fil inextensible.

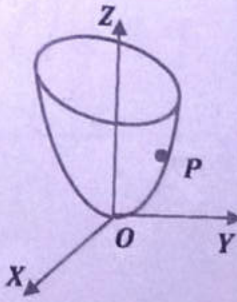
A l'instant initial m repose sur le sol, M se trouve à une hauteur h au dessus du sol et le fil est tendu.



1. Par le principe des travaux virtuels, trouver la condition que doit vérifier la constante α pour que la masse M se déplace vers le sol.
2. A l'aide de l'équation de D'Alembert, trouver l'accélération de la masse M.

Exercice 3 (5pts)

Par les équations de Lagrange de $1^{ère}$ **espèce**, écrire les équations différentielles du mouvement d'un point matériel **P(x,y,z)** de masse **m**, se déplaçant sans frottements à l'intérieur d'un paraboloïde de forme elliptique d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$.



USTHB FGMGP
3ème Année Licence MC

Mercredi 29 Janvier 2014

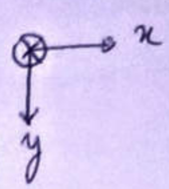
A. DEROUICHE

Correction du Rattrapage de Mécanique Analytique

Exercice 1 : 8 pts

1°/ - bloc → $y_{G_1} = 0 \to k_1$ (0,5) $x_{G_1} = X$

- cylindre → $\begin{cases} x_{G_2} = -R \to k_2 & (0,5) \\ \dot y_{G_2} = \dot Y = \dot X + R\dot\varphi \to k_3 & (0,5) \end{cases}$



$n\,ddl = 2+3-3 = 2 \Rightarrow n = 2$ (0,5) $q_1 = X$, $q_2 = Y$

$\dot\varphi = \frac{\dot Y - \dot X}{R}$ et $\boxed{\delta\varphi = \frac{\delta Y - \delta X}{R}}$

2°/ $T = \frac{1}{2} m_1 \dot X^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot Y^2 + \frac{1}{2} I \dot\varphi^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot X^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot Y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\left(\frac{\dot Y - \dot X}{R}\right)^2$ (0,5)

$$\boxed{T = \frac{1}{4}(2m_1 + m_2)\dot X^2 + \frac{3}{4} m_2 \dot Y^2 - \frac{1}{2} m_2 \dot X \dot Y}$$ (0,5)

$\delta W = 0$ ou $Q_X \delta X + Q_Y \delta Y = 0$ $\delta X \neq \delta Y \neq 0$

$-F_f \delta X + m_2 g\, \delta Y = 0 \Rightarrow \boxed{Q_X = -f m_1 g}$ (0,5) $\boxed{Q_Y = m_2 g}$ (0,5)

3°/ $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot X}\right) - \frac{\partial T}{\partial X} = Q_X \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot Y}\right) - \frac{\partial T}{\partial Y} = Q_Y \Rightarrow \end{cases}$ $\begin{cases} (2m_1 + m_2)\ddot X - m_2 \ddot Y = -2 f m_1 g & (1) \\ 3 m_2 \ddot Y - m_2 \ddot X = 2 m_2 g & (1) \end{cases}$

$$\boxed{\ddot X = \frac{m_2 - 3 f m_1}{3m_1 + m_2} g}$$ (0,5)

$$\boxed{\ddot Y = \frac{m_1(2 - f) + m_2}{3m_1 + m_2} g}$$ (0,5)

USTHB, FGM SGP

3ème Année Licence MC

Mercredi 29 Janvier 2014

A. DEROUICHE

Correction du Rattrapage de Mécanique Analytique

Exercice 2 : 7 pts

1°/ $\delta W = 0 \Rightarrow (M+m)\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta O_1} + m\vec{g}\cdot\overrightarrow{\delta E} = 0$ ← 0,5

$\delta E = 2\,\delta O_1$ avec $\delta O_1 = \delta y$; $\delta E = 2\,\delta y$ ← 0,5

$\delta W = 0 \Rightarrow (M+m)g\cdot\delta y - mg\cdot 2\delta y = 0 \Rightarrow$ 0,5

$(\alpha+1)mg - 2mg = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$ 0,5

2°/ Par D'Alembert calculons $\ddot{y}$

$$\delta W = \delta A \Rightarrow \Big[\big((M+m)g - (M+m)\ddot{y}_{O_1}\big)\delta y_{O_1} + (0 - I_{O_1}\ddot{\varphi}_1)\delta\varphi_1 + (0 - I_{O_2}\ddot{\varphi}_2)\delta\varphi_2 + (-mg - m\ddot{y}_E)\delta y_E = 0\Big]$$ 2

avec $\delta\varphi_1 = \frac{\delta y_{O_1}}{R} = \frac{\delta y}{R}$ 0,5 ; $\delta\varphi_2 = \frac{2\,\delta y_{O_1}}{R}$ 0,5 ; $\delta y_E = 2\,\delta y_{O_1}$

$$\delta W - \delta A = 0 \Rightarrow \big[(M+m)g - (M+m)\ddot{y}\big]\delta y - \frac{m}{2}\ddot{y}\,\delta y - 2m\ddot{y}\,\delta y + (2mg - 4m\ddot{y})\,\delta y = 0$$ → 0,5

$$\Rightarrow -\ddot{y}\left(M + \frac{15}{2}m\right) + (M-m)g = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{2(M-m)}{2M+15m}g}$$ → 1

$M = \alpha m \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{2(\alpha-1)}{15+2\alpha}}$ → 0,5

Exercice 3 : 5 pts

On a 3 coordonnées dépendants et un multiplicateur de Lagrange $k = 1$; $j = 1,2,3$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$ → 0,5

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ → 0,5

$Q_x = 0$ (0,25) ; $Q_y = 0$ (0,25) ; $Q_z = -mg$ (0,25) ; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$ (0,25) ; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$ (0,25) ; $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ (0,25)

d'où les équations différentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x/a^2 & \rightarrow 0{,}5 \\ m\ddot{y} = 2\lambda y/b^2 & \rightarrow 0{,}5 \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda & \rightarrow 0{,}5 \end{cases}$$