

Chapitre 3

Harmoniques dans les onduleurs de tension

1. HARMONIQUES DANS LES ONDULEURS DE TENSION A MLI

La tension délivrée par un onduleur est découpée par principe, elle possède donc un contenu harmonique qu'il convient de bien connaître en fonction des contraintes de qualité de l'onde imposées à la charge. En effet, selon les applications, le taux de distorsion de l'onde de tension de sortie doit être compatible avec des normes plus ou moins sévères. Ceci justifie fréquemment l'usage de filtres et le choix de stratégies de commandes de l'onduleur qui permettent de minimiser le contenu harmonique. Ce chapitre présente une approche de calcul des harmoniques résultantes de quelques lois classiques de modulation de largeur d'impulsion (MLI) dans le cas d'un onduleur monophasé et compare leurs mérites respectifs. La fin de chapitre aborde la MLI triphasée ; son étude est restreinte au fondamental de la tension de sortie, la question de la dynamique de son réglage est abordé ainsi que quelques méthodes pour l'accroître.

Définition des termes

On définit les termes suivants :

- Indice de modulation : $n = F_d/F_s$
- Taux de modulation : $R = M/A$
- Coefficient de réglage : $r = \langle V_s \rangle_{\text{Max}}/E$

2. LES TECHNIQUES DE MLI INTERSECTIVE

Une loi de modulation d'impulsion résulte de la comparaison d'une modulante avec une porteuse, comme représenté sur la figure 3-1. La mise en œuvre de ce principe est représentée à la figure 3-2.

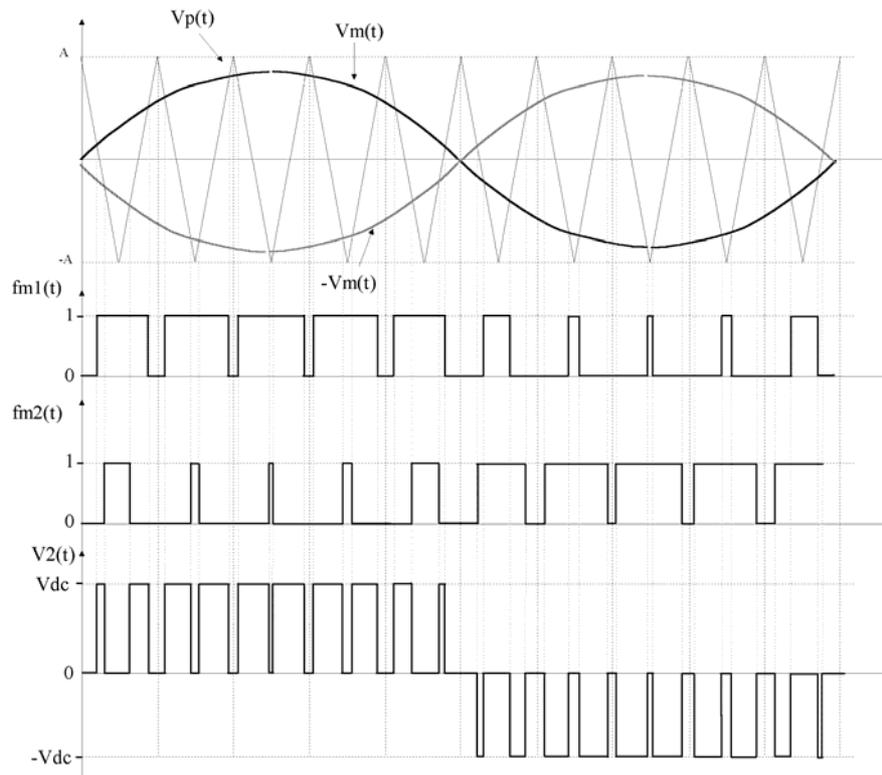


Figure 3-1 : MLI synchrone unipolaire à doublement de fréquence

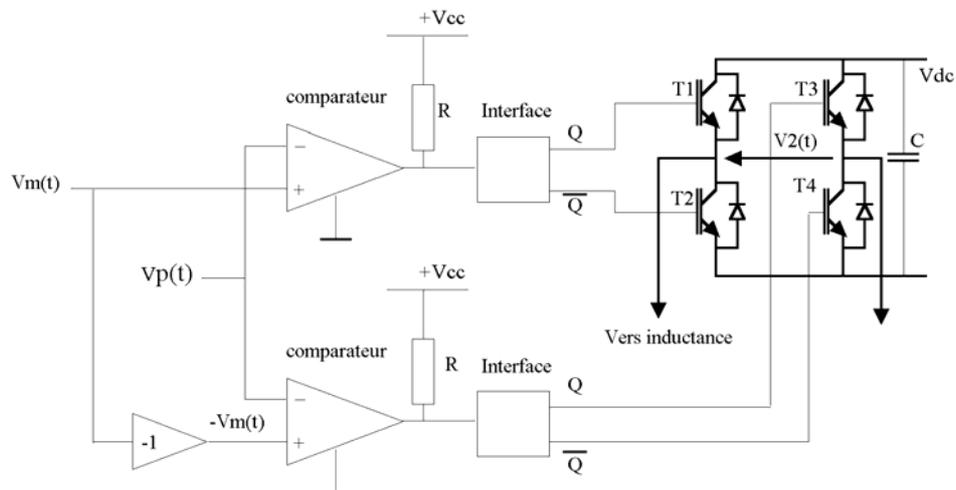


Figure 3-2 : principe de génération d'une loi MLI unipolaire à doublement de fréquence

Modulation non synchrone : elle est réservée à n grand

Modulation synchrone : elle est adaptée aux faibles et moyennes fréquences de découpage ($n < 50$)

Pour étudier le comportement harmonique de la tension de sortie de l'onduleur, il suffit d'étudier la décomposition en série de Fourier de la fonction de modulation $f_m(t)$ puisque $V_s(t) = f_m(t) \cdot E$.

2.1. MLI unipolaire synchrone échantillonnée

Il s'agit du cas d'une onde unipolaire délivrée par un pont monophasé qui serait obtenue pas la comparaison d'une dent de scie et d'une modulante v_{mod} sinusoidale échantillonnée synchrone figure 3-3). On suppose que la fonction $f_m(t)$ obtenue est une fonction impaire et la représentation de la demi-période $T_s/2$ nous suffit donc.

On pose : $\frac{T_s}{T_d} = n$

Les coefficients B_h s'expriment:

$$B_h = \frac{4}{T_s} \int_0^{T_s/2} f_m(t) \sin h\omega t dt = \frac{4}{T_s} \sum_{k=0}^{n/2-1} \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} \sin h\omega t dt$$

avec : $t_{1k} = kT_d + \frac{T_d - t_{ok}}{2}$ et $t_{2k} = kT_d + \frac{T_d + t_{ok}}{2}$

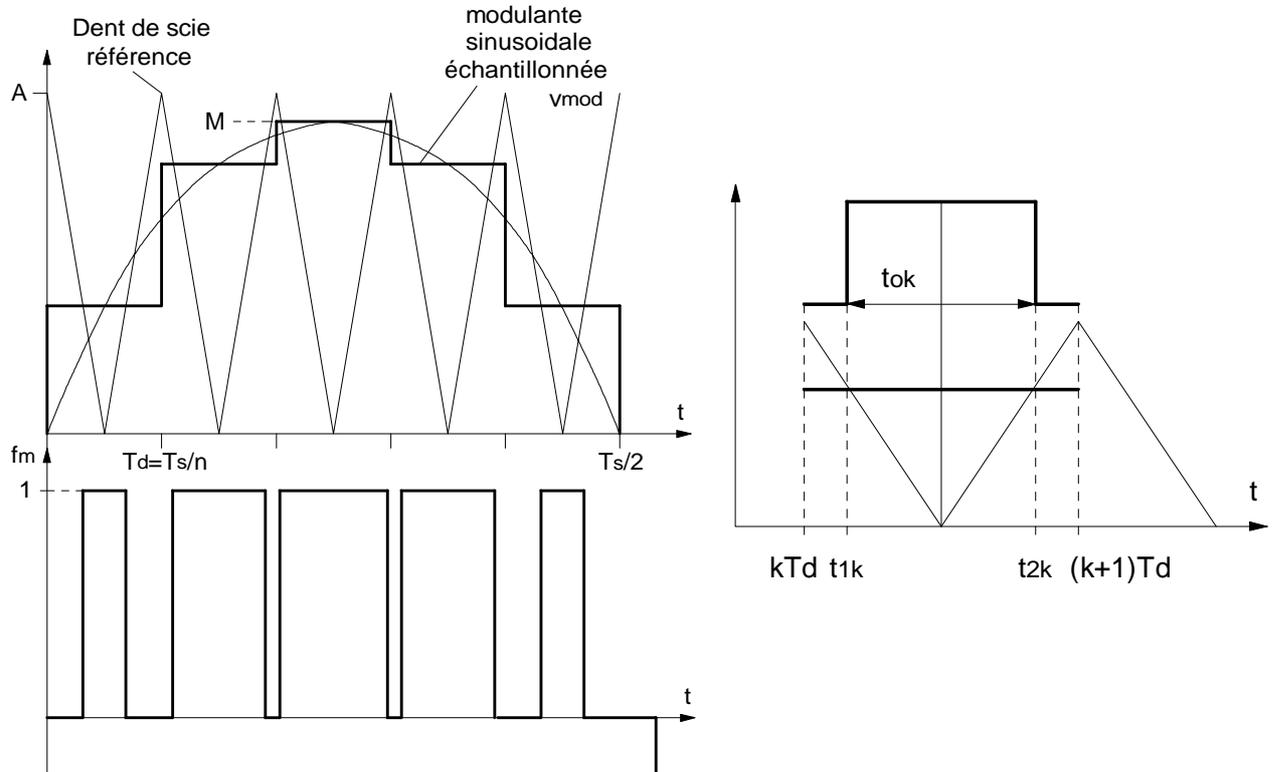


Figure 3-3 : Exemple fortement symétrisé pour le calcul d'une MLI unipolaire

En introduisant la modulante, il vient :

$$t_{ok} = \frac{v_{mod}(kT_d)}{A} T_d = \frac{M}{A} T_d \sin \left[(2k + 1) \frac{\pi}{T_s} T_d \right] = R T_d \sin \left[(2k + 1) \frac{\pi}{n} \right]$$

Le coefficient $R = M/A$ est le taux de modulation, avec $R \leq 1$

L'expression précédente permet d'exprimer t_{1k} et t_{2k} :

$$t_{1k} = \frac{T_d}{2} \left[(2k+1) - R \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right] \text{ et } t_{2k} = \frac{T_d}{2} \left[(2k+1) + R \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right]$$

On peut alors en déduire la forme de B_h :

$$B_h = \frac{4}{hT_s \omega_s} \sum_{k=0}^{n/2-1} [\cos h\omega_s t_{1k} - \cos h\omega_s t_{2k}]$$

Finalement :

$$B_h = \frac{4}{h\pi} \sum_{k=0}^{n/2-1} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi h}{n} \right] \sin \left[\frac{\pi h R}{n} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right]$$

Cette forme n'est guère explicite mais a le mérite de donner précisément les composantes harmoniques du signal. Nous en précisons les particularités plus loin, par calcul numérique.

2.2. Onde unipolaire avec doublement de fréquence

Toujours dans le cas d'un pont monophasé, on peut aboutir à un doublement de fréquence, en utilisant, pour les deux bras, des modulations centrées synchrones, créées par deux modulateurs en opposition de phase. Ceci peut, à nouveau, être obtenu par comparaison d'une dent de scie unique aux deux modulateurs précédentes (figure 3-4). Ce principe revient tout simplement à reproduire la modulation précédente mais avec une fréquence de la porteuse artificiellement multipliée par deux. Le calcul est donc le même avec n deux fois plus grand.

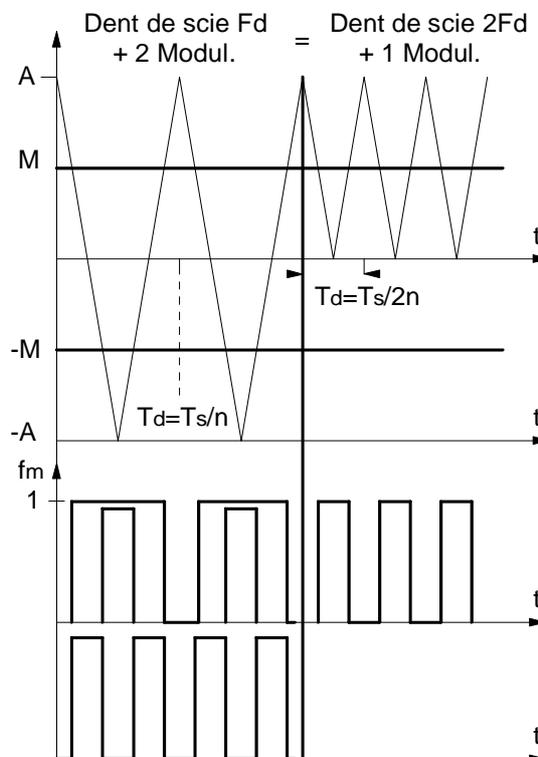


Figure 3-4 : commande unipolaire à $2F_d$ dans un pont monophasé

2.3. Onde bipolaire

Le même type de calcul peut être appliqué à une onde bipolaire, avec des hypothèses de travail similaires. La figure 3-5 indique la configuration choisie. Le calcul est plus rapide avec une fonction de modulation évoluant entre 0 et 2, mais équivaut à celui d'une onde bipolaire +1/-1.

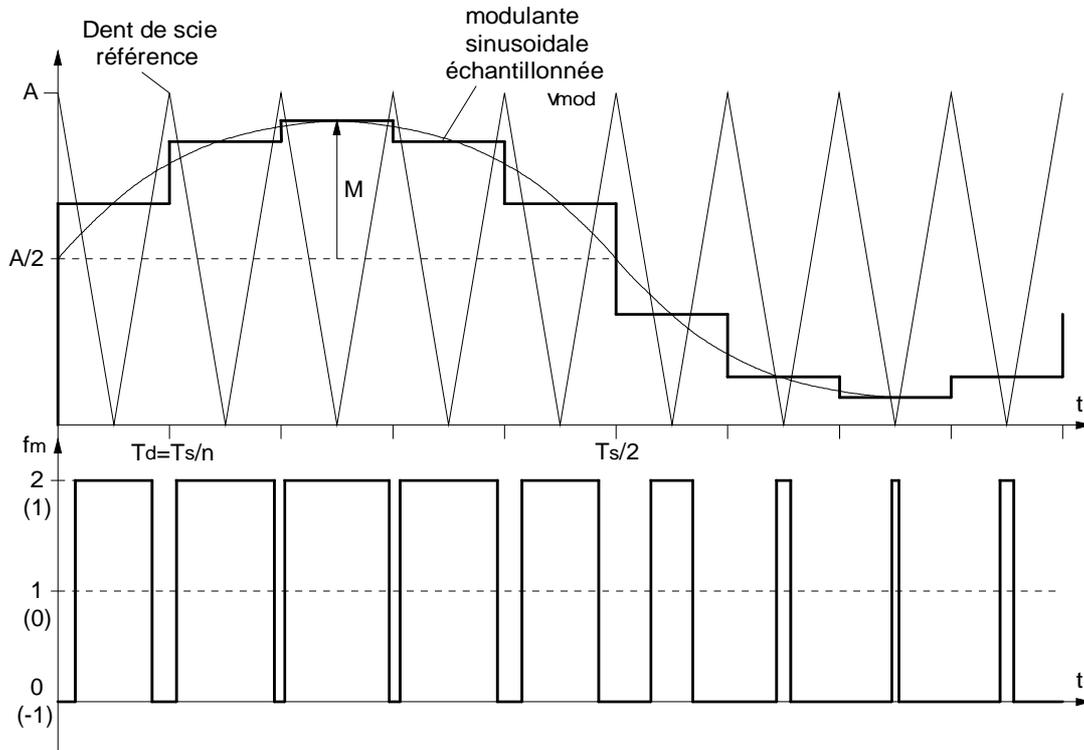


Figure 3-5 : Exemple fortement symétrisé pour le calcul d'une MLI bipolaire

L'onde n'étant ni paire ni impaire, le calcul des A_h et des B_h est maintenant nécessaire :

$$B_h = \frac{4}{T_s} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} \sin h\omega t \, dt \quad \text{et} \quad A_h = \frac{4}{T_s} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} \cos h\omega t \, dt$$

Avec cette forme de modulation, l'expression de t_{ok} devient :

$$t_{ok} = \frac{v_{\text{mod}}(kT_d)}{A} T_d = \frac{T_d}{2} + \frac{M'}{A} T_d \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{T_s} T_d \right] = T_d \left[\frac{1}{2} + \frac{R}{2} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right]$$

Ce qui conduit à :

$$t_{1k} = \frac{T_d}{2} \left[(2k+1) - \frac{1}{2} - \frac{R}{2} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right] \quad \text{et} \quad t_{2k} = \frac{T_d}{2} \left[(2k+1) + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right]$$

Le calcul est quasi-identique au précédent et débouche sur :

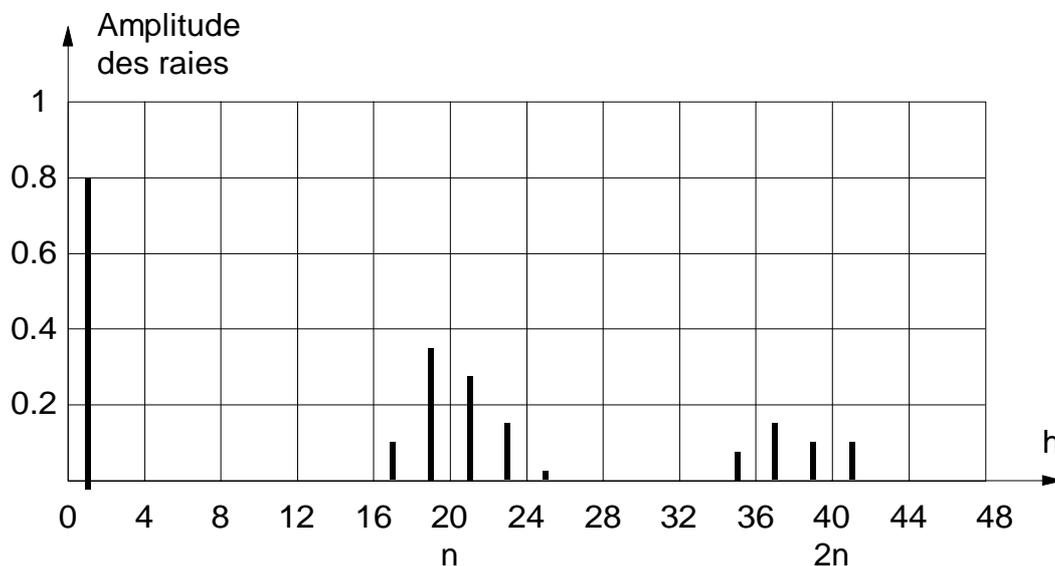
$$B_h = \frac{4}{h\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi h}{n} \right] \sin \left[\frac{\pi h}{2n} \left[1 + R \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right] \right]$$

$$A_h = \frac{4}{h\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left[(2k+1) \frac{\pi h}{n} \right] \sin \left[\frac{\pi h}{2n} \left[1 + R \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{n} \right] \right] \right]$$

A partir des différentes expressions obtenues, il est aisé de calculer numériquement les différentes composantes harmoniques. Les décompositions spectrales qui apparaissent figure 3-6 résultent de ce calcul qui a été fait pour $R = 0.8$.

Ces résultats donnent clairement la tendance du comportement d'une MLI :

- On trouve un fondamental à la fréquence de modulation, dont l'amplitude est directement proportionnel au taux de modulation,
- Les harmoniques que l'on pourrait qualifier de basse fréquence sont inexistantes (ou quasi-inexistantes),
- Les premières harmoniques qui apparaissent sont liées à la fréquence de découpage et correspondent à des rangs de la forme $(nh + h')F_s$ ou $(nh * h')F_s$, soit des raies espacées de F_s autour des multiples de la fréquence de découpage,
- Si n est grand, le spectre peut être dissocié en groupes de raies organisés de ces multiples de la fréquence de découpage (intermodulation entre groupes négligeable).
- Selon la technique de modulation, certaines des raies correspondant à l'observation générale précédentes, peuvent être absentes.



a-MLI unipolaire sans doublement de fréquence-R = 0.8

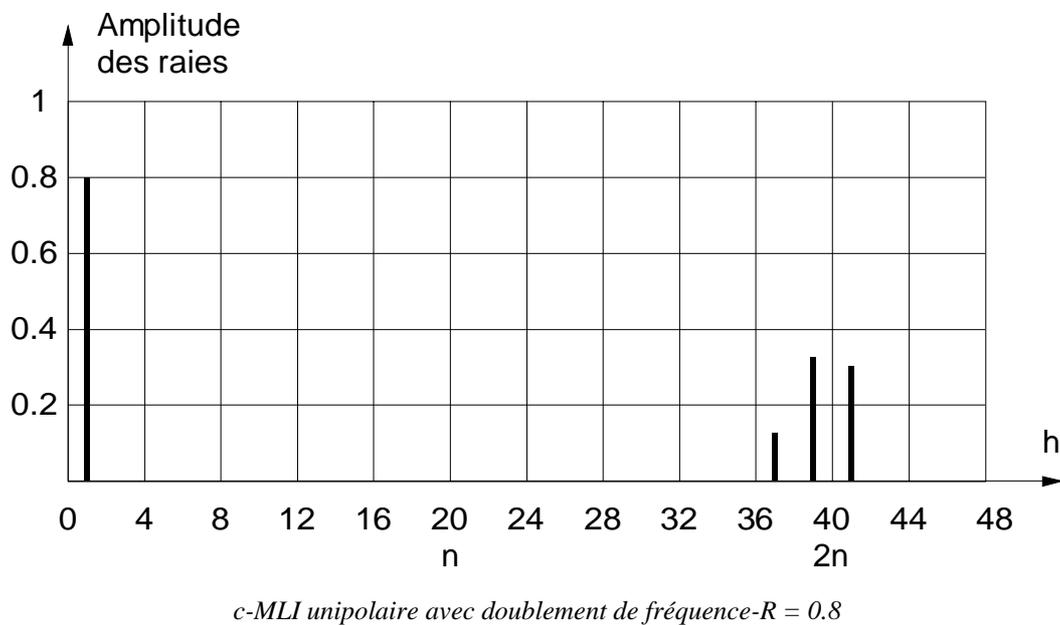
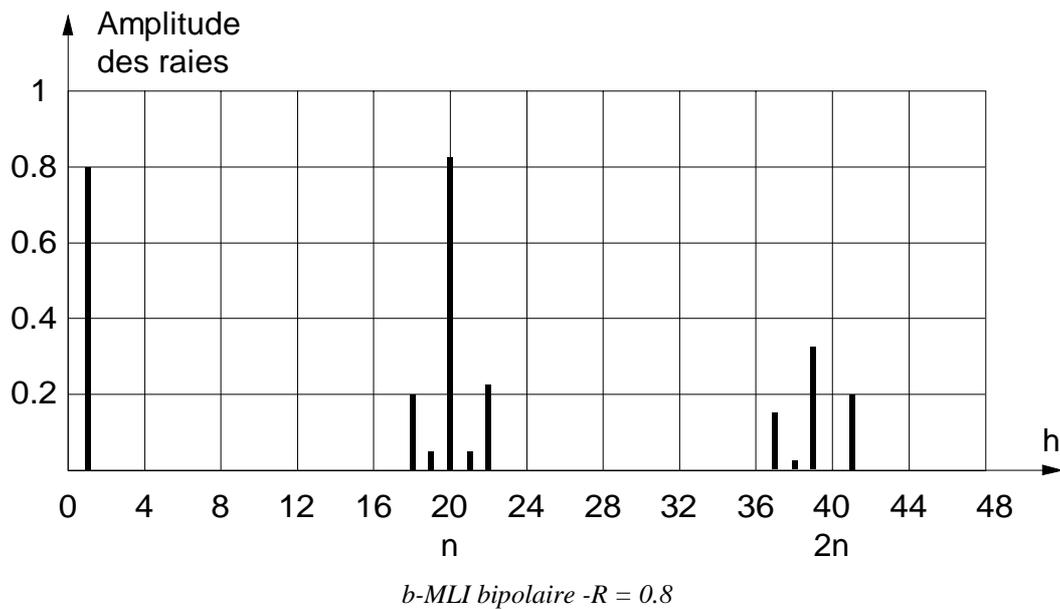


Figure 3-6 : Contenu harmonique des MLI unipolaires et bipolaires

Ces calculs donnent la décomposition exacte, à l'échantillonnage près, effectué sur la modulante pour fixer de façon simple la largeur des impulsions.

2.4. MLI asynchrone à grand indice de modulation

On peut mettre en œuvre une autre méthode, approchée celle-là, et supposant que $n \gg 1$. Cette méthode consiste à calculer la décomposition en série de Fourier de la porteuse non modulée puis à injecter la variable modulée, qui sera toujours la largeur d'une impulsion dans la dite série. La justification mathématique de cette approche est délicate mais il apparaît que pour des modulations à fréquence faible devant la fréquence de découpage (donc n grand), le résultat est très proche de la réalité et a le mérite de faire apparaître plus nettement les groupes dont nous avons souligné l'existence précédemment.

Pour opérer un tel calcul, appuyons nous sur les signaux de la figure 3-7 qui nous permettrons d'effectuer la comparaison avec les résultats précédents.

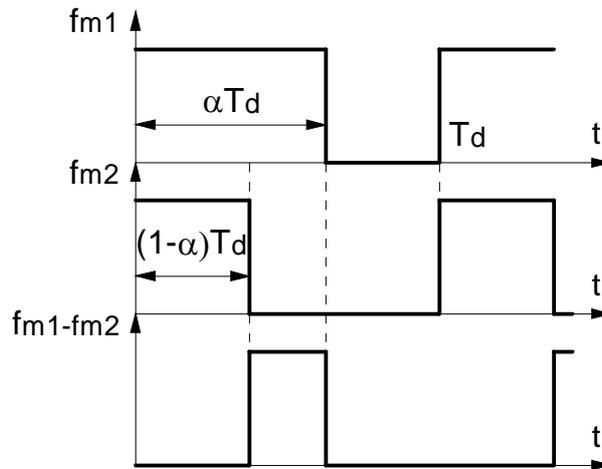


Figure 3-7 : Porteuses non modulées

Les séries de Fourier des fonctions de modulations f_{m1} et f_{m2} sont :

$$f_{m1} = \alpha + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} \sin(h\pi\alpha) \cos h(\omega_d t - \pi\alpha)$$

$$f_{m2} = (1 - \alpha) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} \sin h\pi(1 - \alpha) \cos h[\omega_d t - \pi(1 - \alpha)]$$

On pourrait déduire de la première, la décomposition d'un signal bipolaire modulé. La démonstration est plus simple sur un signal unipolaire modulé qui peut être obtenu en faisant la différence des 2 précédents :

$$f_{m1} - f_{m2} = (2\alpha - 1) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} \sin(2h\pi\alpha) \cos(h\omega_d t)$$

La grandeur de modulation est ici le rapport cyclique dont on assimile la forme (normalement discrète) à une fonction à temps continue de la forme :

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + R \sin \omega_s t)$$

En injectant cette grandeur modulante dans la série précédente, on obtient :

$$f_{m1} - f_{m2} = R \sin \omega_s t + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} \sin[h\pi(1 + R \sin \omega_s t)] \cos(h\omega_d t)$$

$$f_{m1} - f_{m2} = R \sin \omega_s t + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} (-1)^h \sin[h\pi R \sin \omega_s t] \cos(h\omega_d t)$$

$$f_{m1} - f_{m2} = R \sin \omega_s t + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} (-1)^h \left[2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(h\pi R) \sin (2p+1) \omega_s t \right] \cos(h\omega_d t)$$

Finalelement :

$$f_{m1} - f_{m2} = R \sin \omega_s t + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2}{h\pi} (-1)^h \left[\sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(h\pi R) \begin{bmatrix} \sin [nh + (2p+1) \omega_s t] \\ - \sin [nh - (2p+1) \omega_s t] \end{bmatrix} \right]$$

Cette décomposition approchée fait clairement apparaître la notion de groupe (si l'on suppose toujours qu'il n'y a pas d'intermodulation). En effet, pour h fixé, on trouve des ensembles de raies espacé de plus ou moins $2p+1$ par rapport à nh , rang multiple de la fréquence porteuse.

Le tableau suivant donne les valeurs numériques correspondantes pour différentes valeurs du taux de modulation et pour les deux premiers groupes ($h=1,2$). On note qu'il n'y a pas de raie à $nhFs$, ce que l'on observait déjà dans le calcul exact.

2p+1	h=1					h=2				
	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
$(2/h\pi)J_{2p+1}(\pi h R)$ R = 0.5	0.36	0.043	1.4e ⁻³	x	x	0.09	0.106	0.016	0.001	x
$(2/h\pi)J_{2p+1}(\pi h R)$ R = 0.8	0.314	0.139	0.012	5e ⁻⁴	x	0.105	0.114	0.084	0.017	1.8e ⁻³
$(2/h\pi)J_{2p+1}(\pi h R)$ R = 1	0.181	0.213	0.033	0.002	x	0.067	0.009	0.118	0.05	0.009

Par rapport au calcul précédent, on note une similitude, avec la nuance suivante : dans ce cas, les raies symétriques autour de nh sont d'amplitudes identiques. Dans le calcul exact, ce n'est pas le cas. On note néanmoins que la moyenne arithmétique des amplitudes de 2 raies symétriques est sensiblement égale à l'amplitude des raies correspondantes du calcul approché.

D'une façon générale, on peut donc considérer que la représentation spectrale qualitative de la figure 3-8, quel que soit la nature du modulateur et si $n \gg 1$, recouvre par excès, le contenu de n'importe quelle onde MLI.

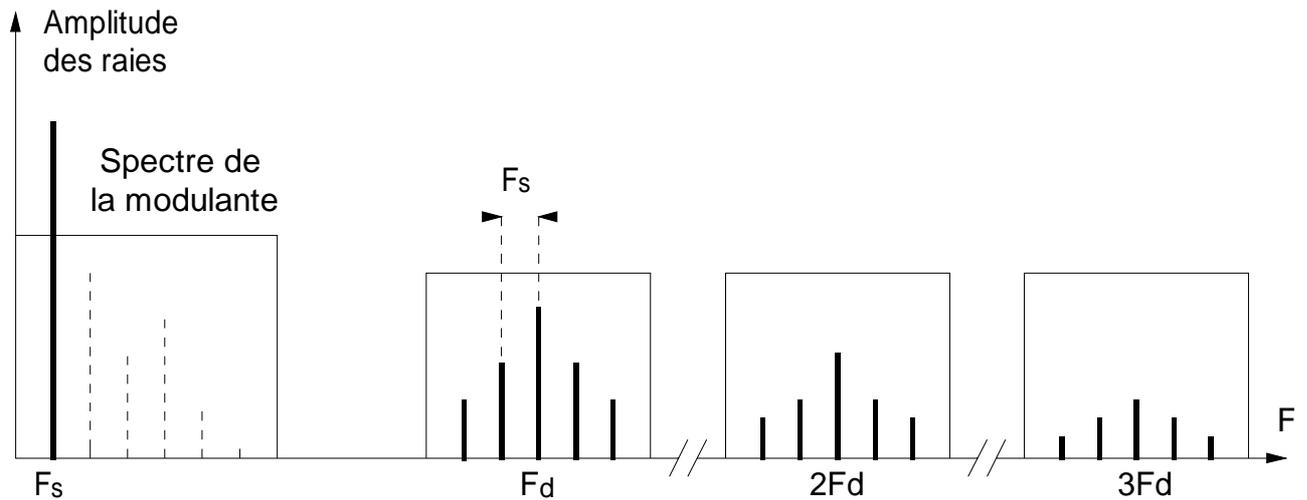


Figure 3-8 : Spectre général "par excès" des ondes MLI

3. MLI CALCULEE

Les MLI calculées sont utilisées lorsque le rapport entre la fréquence de découpage et la fréquence fondamentale est faible, ce qui est fréquent en forte puissance. Dans ce cas, il y a présence de composantes harmoniques de rang bas indésirables que l'on cherche à éliminer ou minimiser en exploitant au mieux le nombre d'impulsions disponibles sur la période fondamentale. Pour atteindre cet objectif, on détermine *a priori* des formes d'ondes optimisées qui seront ensuite mémorisées dans des tables. La courbe inférieure du graphe de la figure 3-9 montre un exemple simple de fonction de modulation sur laquelle on peut procéder à cette optimisation.

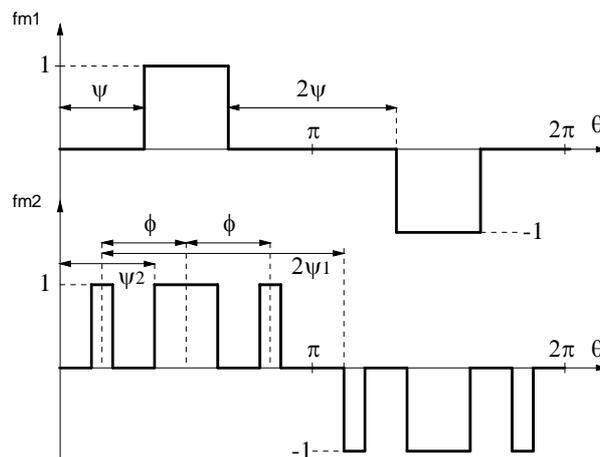


Figure 3-9 : Principe d'une MLI calculée

Il s'agit ici d'une forme à trois niveaux et 6 impulsions par période, mais le principe peut être généralisé à un nombre quelconque d'impulsions, sachant que celui-ci sera défini par le rapport entre la fréquence de commutation permise par la technologie des interrupteurs et la fréquence fondamentale.

La décomposition de la fonction de modulation de base (courbe supérieure du graphe) est :

$$f_{m1}(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \cos(h\psi) \sin(h\theta)$$

Avec h impair.

La décomposition du motif complet est alors :

$$f_{m2}(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} [\cos(h\psi_1) + 2\cos(h\psi_2) \cos(h\phi)] \sin(h\theta)$$

A partir de là, Il est possible de calculer l'amplitude de chaque rang harmonique en fonction des différents paramètres angulaires :

- H1 = $4/\pi (\cos \psi_1 + 2\cos \psi_2 \cos \phi)$
- H3 = $4/3\pi (\cos 3\psi_1 + 2\cos 3\psi_2 \cos 3\phi)$
- H5 = $4/5\pi (\cos 5\psi_1 + 2\cos 5\psi_2 \cos 5\phi)$, etc...

L'optimisation correspond ensuite à un lourd travail de résolution numérique qui peut s'appuyer sur différents critères comme l'annulation pure et simple de certains rangs ou, plus globalement, sur la minimisation du taux de distorsion.

il faut souligner que l'on doit mémoriser autant de motifs que de valeurs désirées de la composante fondamentale. D'autre part, dans l'hypothèse d'une application à large plage de fréquence (variation de vitesse), il faut créer différentes gammes de motifs selon la situation dans cette plage (nombre d'impulsions par période fondamentale croissant avec cette dernière, à fréquence de commutation donnée). Cette mise en œuvre est donc assez lourde, avec comme principales difficultés la nécessité de prendre en compte les temps de retard à la commutation des interrupteurs de puissance qui déformeront le motif idéal et le respect d'une continuité entre motifs en régime dynamique.

L'optimisation correspond ensuite à un lourd travail de résolution numérique qui peut s'appuyer sur différents critères comme l'annulation pure et simple de certains rangs ou, plus globalement, sur la minimisation du taux de distorsion.

4. MLI TRIPHASEE

La figure 3-10 représente les fonctions de modulation dans le cas d'un onduleur triphasé, obtenues selon le principe développé jusqu'à présent.

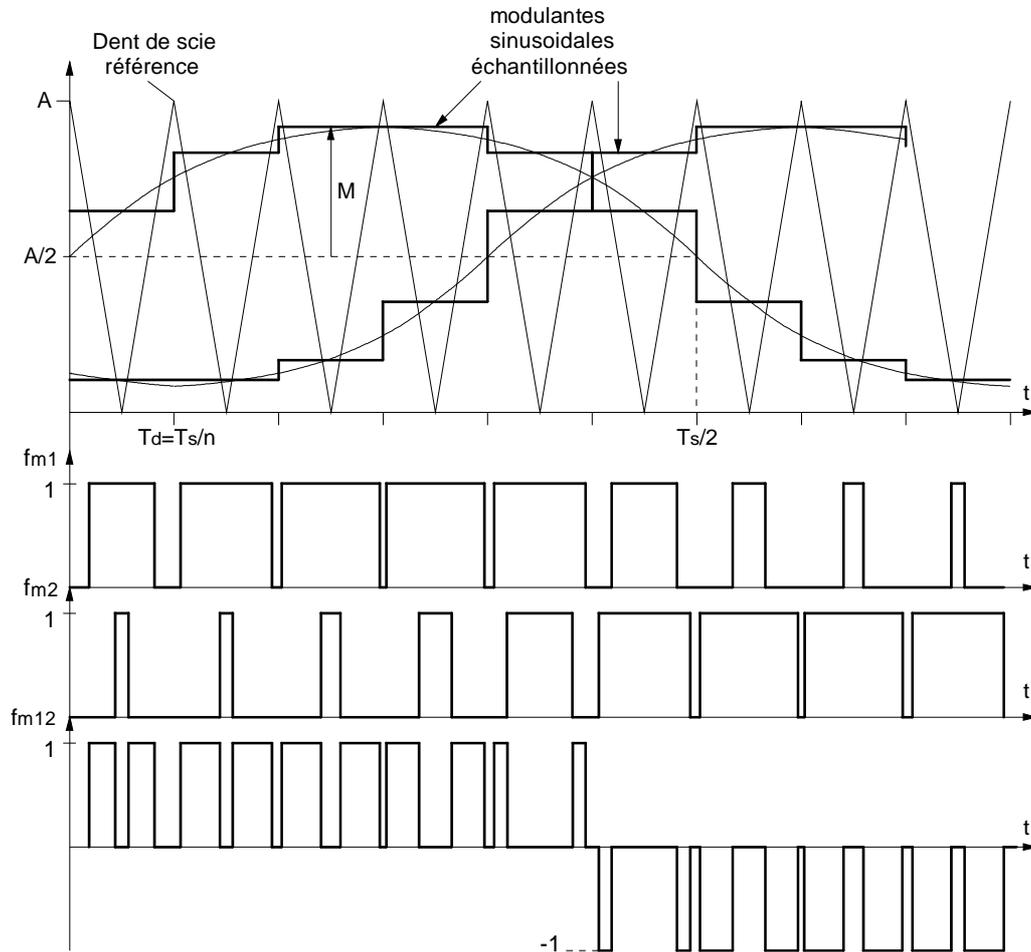


Figure 3-10 : MLI triphasée

4.1. Définition des fonctions de modulation :

Au sens du premier harmonique, l'expression des fonctions de modulation est donnée par :

$$f_{m1}(t) = \frac{1}{2}(1 + R \sin(\omega_s t)), \quad f_{m2}(t) = \frac{1}{2}(1 + R \sin(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})),$$

$$f_{m3}(t) = \frac{1}{2}(1 + R \sin(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}))$$

D'où le système des fonctions de modulation composées entre cellules de commutation :

$$f_{m12}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}R \cos(\omega_s t - \frac{\pi}{3}), \quad f_{m23}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}R \cos(\omega_s t - \pi),$$

$$f_{m31}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}R \cos(\omega_s t + \frac{\pi}{3})$$

Conséquences :

- ✓ La MLI triphasée est de type unipolaire à doublement de fréquence puisque les fonctions de modulations ne sont pas complémentaires par principe.

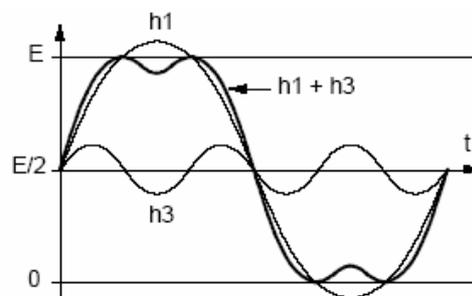
Si on exprime les fonctions de modulation avec leurs termes harmoniques, on observe que :

- ✓ Les harmoniques de rang 3 créent un **système homopolaire**,
- ✓ Les harmoniques de rang $6k+1$ créent des **systèmes harmoniques directs**,
- ✓ Les harmoniques de rang $6k-1$ créent des **systèmes harmoniques inverses**.

4.2. Amélioration de la dynamique du fondamental

La tension fondamentale disponible en sortie d'onduleur est : $V_{s1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}E = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}U_{réseau}$

Cette tension est inférieure à la tension naturelle du réseau, une machine alimentée dans ces conditions est donc déclassée. La solution consiste à injecter dans la fonction de modulation un harmonique de rang 3 qui permettra d'accroître artificiellement le fondamental de la tension de sortie. Le problème consiste à déterminer quel taux d'harmonique 3 injecter dans la modulante. La somme de H1 et H3 ne doit pas dépasser la tension d'alimentation E.



Le calcul permettant de définir le taux optimal d'harmonique 3 est relativement simple. L'expression du signal total (sans tenir compte du point de repos E/2) est :

$$v_s(\theta) = V_{s1} \sin\theta + V_{s3} \sin 3\theta$$

La valeur maximale de ce signal doit être égale à 1 si l'on raisonne en grandeur normalisée par rapport à E/2. Il faut donc d'abord trouver les coordonnées du maximum par la résolution de :

$$dv_s/d\theta = 0 = V_{s1} \cos\theta + 3V_{s3} \cos 3\theta,$$

Condition qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}(V_{s1} + 3V_{s3} - 12V_{s3} \sin^2\theta) \cdot \cos\theta &= 0, \\ V_{s1}(1 + 3K_{13} - 12K_{13} \sin^2\theta) \cdot \cos\theta &= 0, \\ \text{avec } K_{13} &= V_{s3}/V_{s1}\end{aligned}$$

Les solutions qui nous intéressent sont celles qui correspondent à un angle différent de $\pi/2$, donc celles de :

$$1 + 3K_{13} - 12K_{13} \sin^2\theta = 0$$

On en déduit les coordonnées des maxima :

$$\theta_M = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12K_{13}}} \quad v_{SM} = V_{s1} \left(\frac{1}{3} + K_{13}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{3K_{13}}}$$

En respectant la condition $v_{SM} = 1$, V_{s1} peut s'exprimer :

$$V_{s1} = \frac{\sqrt{K_{13}}}{\left(\frac{1}{3} + K_{13}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

la valeur normalisée de V_{s1} est alors maximale pour $K_{13} = 1/6$ et vaut $V_{s1M} = 1,155$. L'angle correspondant est $\theta_M = \pi/3$. La valeur efficace maximale réelle de la composante fondamentale est maintenant :

$$V_{s1_{eff}} = 1.155E/2 \sqrt{2} = 0,408E$$

Soit en alimentation par un réseau triphasé :

$$V_{s1_{eff}}/V_{eff} = 0,955.$$

Ainsi, on obtient un fondamental de tension qui est quasiment unitaire, il n'y a plus de déclassement d'alimentation par cette technique.