Annexe 1 au chapitre 6 : Exercices récapitulatifs sur la distribution binomiale

Note préliminaire : Les solutions présentées ici font rarement appel aux tables des distributions et fonctions de répartition. Il est tout à fait possible d'utiliser ces dernières dans la plupart des exercices.

Exercice 6.1 : CD audio : « 5-bit oversampling »

Dans un lecteur CD, le canal de transmission des informations ne traite que des 0 et des 1. A cause de perturbations dues à l'électricité statique, chaque chiffre transmis l'est avec une probabilité d'erreur de 1/5. Dès lors, pour éviter une erreur, on transmettra une séquence de cinq 0 au lieu de 0 et de cinq 1 au lieu de 1. Le récepteur décode selon la règle de la majorité.

a. Quelle est la probabilité de mauvaise interprétation d'une information ?

Soit X, une variable aléatoire ~Bi(5 ; 0,2) représentant le nombre de caractères erronés dans une séquence de cinq chiffres, et F = « *L'information est incorrectement décodée.* ».

$P(F) = P(X \geq 3) = 1 - F(2) = 1 - C_5^0\, 0{,}2^0 0{,}8^5 - C_5^1\, 0{,}2^1 0{,}8^4 - C_5^2\, 0{,}2^2 0{,}8^3 =$

$1 - 0{,}328 - 0{,}410 - 0{,}205 = 0{,}057$.

Donc la probabilité que la transmission d'un caractère binaire soit correcte =

$1 - 0{,}057 = 0{,}943$.

b. Une chanson standard de trois minutes est composée de 180.000 signaux digitaux. Quelle est la probabilité qu'elle soit décodée sans erreur ?

Soit C = « *Tous les caractères décodés sont conformes aux caractères originaux.* », $P(C) = 0{,}943^{180000} = 1{,}273e\text{-}4588 \cong 0$.

Exercice 6.2 : Réseau de téléphonie mobile

Un réseau de téléphonie mobile sur un territoire donné se compose de n relais et fonctionne un jour donné si, ce jour-là, au moins k relais sont opérationnels.
Par mauvais temps (pluie, neige, …), chaque relais fonctionne avec une probabilité p_1, indépendamment des autres. Par temps sec, idem mais avec une probabilité p_2.

a) *Si α désigne la probabilité qu'il pleuve demain, quelle est la probabilité que le réseau fonctionne alors ?*

Soit S = « *Le réseau fonctionne.* » ; R = « *Le temps sera mauvais demain.* ».

Et $F_i(k)$: la fonction de répartition quand X vaut k, , avec X une V.A.D. ~Bi(n, p_i), (i = $R, \overline{R}$).

Donc par LPT :

P(S) = P($\overline{R}$).P(S/ $\overline{R}$) + P(R).P(S/R) = $(1-\alpha).\left[1-F_{\overline{R}}(k-1)\right]+\alpha.\left[1-F_R(k-1)\right]=$

$$(1-\alpha).\sum_{i=k}^{n} C_n^i p_{\overline{R}}^i (1-p_{\overline{R}})^{n-i} + \alpha.\sum_{i=k}^{n} C_n^i p_R^i (1-p_R)^{n-i}$$

b) *Si k = 5, combien de relais doit-on installer au total et au minimum pour que le réseau fonctionne quelque soit le climat ?*

(N.B. p_1 = 0,8 ; p_2 = 0,95 ; on tolère 0,7 % de pannes.)

Il faut P(S) ≥ 0,993 par temps de pluie ; donc n tel que $\sum_{i=5}^{n} C_n^i 0{,}8^i 0{,}2^{n-i} \geq 0{,}993$

Donc 1 – F(4) ≥ 0,993. ⇒ F(4) ≤ 0,007.

Donc, n = 10, voir tables de la fonction de répartition binomiale (Annexe 4 au Chapitre 6).

Exercice 6.3 : Design « never fail »

Une firme de construction d'ordinateurs veut lancer une nouvelle gamme de micro-ordinateurs « soft fail » et « never fail » en les équipant de plusieurs processeurs qui prennent automatiquement le relais les uns des autres en cas de panne.
Ces ordinateurs sont destinés à travailler dans des environnements très perturbés. Ainsi la probabilité de panne d'un processeur vaut-elle 1-p au cours d'une session de travail, indépendamment du fonctionnement des autres processeurs.
Cependant pour fonctionner sous la garantie de « never fail », l'ordinateur doit posséder une majorité de processeurs en ordre de fonctionnement.

Pour quelles valeurs de p préfère-t-on un ordinateur à trois processeurs plutôt qu'à 5 ?

Soit F_i = « *L'ordinateur à i processeurs fonctionne sous la garantie de « never fail.* » », (i = 3 ; 5).

Soit X_i, le nombre de processeurs en fonctionnement dans un ordinateur à i processeurs.

X_i est donc une V.A.D. ~Bi(i, p), (i = 3 ;5).

Pour i = 3, $P(F_3) = P(X_3 \geq 2) = P(X_3 = 2) + P(X_3 = 3) =$

$$C_3^2 p^2 (1-p)^1 + C_3^3 p^3 (1-p)^0 = 3.p^2.(1-p) + p^3 = 3.p^2 - 2.p^3 \ .$$

Pour i = 5, $P(F_5) = P(X_5 \geq 3) = P(X_5 = 3) + P(X_5 = 4) + P(X_5 = 5) =$

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p)^1 + C_5^5 p^5 (1-p)^0 = 10.p^3 (1-p)^2 + 5.p^4.(1-p) + p^5 =$$
$$10.p^3.(1-2.p+p^2) + 5.p^4 - 5.p^5 + p^5 = 10.p^3 - 20.p^4 + 10.p^5 + 5.p^4 - 4.p^5 =$$
$$10.p^3 - 15.p^4 + 6.p^5.$$

On préférera la machine à 3 processeurs relativement à la machine à 5 processeurs, si $P(F_3) > P(F_5)$.

Donc si $3p^2 - 2p^3 > 10p^3 - 15p^4 + 6\,p^5$ ou $- 6\,p^5 + 15p^4 - 12p^3 + 3p^2 > 0$

Donc si $- 3p^2.(2p^3 - 5p^2 + 4\,p - 1) > 0$, soit $2p^3 - 5p^2 + 4\,p - 1 < 0$

Décomposant, on obtient : $2p^3 - 4p^2 + 2\,p - p^2 + 2\,p - 1 < 0$

Regroupant et mettant 2p en évidence : $2p.(p^2 - 2p + 1) - (p^2 - 2\,p + 1) < 0$

Soit $(2p - 1).(p - 1)^2 < 0$. Donc $2p - 1 < 0$, soit $p < ½$.

Exercice 6.4 : Le choix d'un jury

Un étudiant se prépare à passer un examen oral important. Il se préoccupe de savoir s'il sera en forme ou non. Son opinion est que s'il est en forme, chacun de ses examinateurs le jugera suffisant avec une probabilité de 0,8 et indépendamment des autres examinateurs. Dans le cas contraire, cette probabilité tombe à 0,4.
L'étudiant réussit si une majorité de ses examinateurs le juge suffisant. Par ailleurs, il pense avoir deux fois plus de chances d'être en méforme qu'en forme.

A-t-il plus d'intérêt à demander un contrôle par 3 que par 5 examinateurs ?

Soient les événements :
F = « *Etre en forme.*», $\Rightarrow$ P(F) = 1/3.
$\overline{F}$ = « *Etre en méforme.* », $\Rightarrow$ P($\overline{F}$) = 2/3. {F, $\overline{F}$} forme un S.C.E.
S = « *Etre reçu.*».
Par la loi des probabilités totales (L.P.T.) : P(S) = P(S/F).P(F) + P($S/\overline{F}$).P($\overline{F}$)

Soit X, le nombre de jugements positifs que l'étudiant obtiendra, X est une V.A.D ~Bi(n, p_i) avec n = 3 ou 5, le nombre d'examinateurs, et p_i, la probabilité d'être jugé suffisant par chacun des examinateurs, i = F ou $\overline{F}$.

P(S/F) = P(X $\geq$ 3/ F) s'il y a 5 examinateurs et P(X $\geq$ 2/ F) s'il y a trois examinateurs.
P($S/\overline{F}$) = P(X $\geq$ 3/$\overline{F}$) s'il y a 5 examinateurs et P(X $\geq$ 2/$\overline{F}$) s'il y a trois examinateurs.

Dans le cas de 5 examinateurs :

$$P(S/F) = \sum_{i=3}^{5} C_5^i 0,8^i 0,2^{5-i} = 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 0,94208.$$

$$P(S/\overline{F}) = \sum_{i=3}^{5} C_5^i 0,4^i 0,6^{5-i} = 0,2304 + 0,0768 + 0,01024 = 0,31744.$$

Donc P(S) = 0,94208.1/3 + 0,31744.2/3 = 0,526.

Dans le cas de 3 examinateurs :

$$P(S/F) = \sum_{i=2}^{3} C_3^i 0,8^i 0,2^{3-i} = 0,384 + 0,512 = 0,896.$$

$$P(S/\overline{F}) = \sum_{i=2}^{3} C_3^i 0,4^i 0,6^{3-i} = 0,288 + 0,064 = 0,352.$$

Donc P(S) = 0,896.1/3 + 0,352.2/3 = 0,533.

Donc l'étudiant choisira un jury de trois examinateurs.

Annexe 2 au chapitre 6 : Exercices récapitulatifs sur la distribution de Poisson

Exercice 6.5 : Accidents sur l'autoroute :

On admet que le nombre d'accidents survenant quotidiennement sur une autoroute est une v. a. de Poisson de paramètre $\theta = 3$.

a. Quelle est la probabilité qu'il survienne 3 accidents ou plus lors d'un jour donné ?

b. Même question si l'on sait qu'un accident au moins a eu lieu.

Solution :

Soit X, le nombre quotidien d'accidents sur l'autoroute, $X \sim Po(3)$.

a. On cherche $P(X \geq 3) = 1 - F(2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) =$

$1 - 0{,}050 - 0{,}149 - 0{,}224 = 1 - 0{,}423 = 0{,}577$.

b. On cherche $P(X \geq 3/ X \geq 1) = P(X \geq 3 \cap X \geq 1)/ P(X \geq 1)$,

(Loi des probabilités composées.)

Or $X \geq 3 \Rightarrow X \geq 1$, donc $\{X \geq 3\} \subset \{X \geq 1\}$.

Donc $P(X \geq 3 \cap X \geq 1) = P(X \geq 3) = 0{,}577$ (voir *a.* supra).

et $P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 0{,}050 = 0{,}950$.

Donc $P(X \geq 3/ X \geq 1) = 0{,}577/0/0{,}950 = 0{,}607$.

Exercice 6.6 : Job de vacances :

E. SANZ, patron de la station-service du coin, organise le travail pour la période de vacances. Basant son avantage compétitif sur le service à ses clients, il désire qu'ils n'attendent pas trop avant d'être servis.
Pour les mois de juillet et d'août, il estime que le taux d'arrivée des clients est de 3 par minute entre 10h et 18 h.
Si le nombre de clients par minute est supérieur à 4, il envoie un étudiant servir les clients - en renfort du pompiste habituel - pendant 3 minutes.
L'étudiant se présente à 10 heures et quitte la station à 18 heures tous les jours.

A combien de temps peut-on estimer l'inoccupation de l'étudiant à la pompe par jour ?

Solution :

Soit *O* = « *Faire appel à l'étudiant pour 3 minutes.* ».

Soit Xi = une v.a.d. égale au nombre d'arrivées à la station-service de clients par i minutes entre 10h et 18h un jour donné de juillet - août. Xi ~Po(i * 3).

P(*O*) = $P(X_1 > 4)$ = P(5)+P(6)+P(7)+P(8)+ … ou = 1 - F(4)

= 0,101 + 0,05 + 0,022 + 0,008 + 0,003 + 0,001 + 0 ou 1 - 0,815 = 0,185.

(utilisation des tables du cours, annexes 5 et 6 au chapitre 6).

Or il y a 480 minutes dans les 8 heures de présence de l'étudiant.

Donc pour chaque minute de ces 480, la probabilité de devoir prester 3 minutes est de 0,185.

Selon l'approche fréquentiste, l'étudiant devra donc prester 0,185 * 480 = 88,8 $\Rightarrow$ 89 fois 3 minutes soit 267 minutes.

Il sera donc inoccupé 600 - 267 = 333 minutes, soit un peu plus de 5 heures et demie.

<u>Exercice 6.7 :</u> Dactylographie :

Une agence de dactylographie emploie 2 dactylos. Le nombre d'erreurs par page est de 3 pour Anaïs et de 4 pour Bertrand. Si la page a la même probabilité d'être dactylographiée par l'une ou l'autre, *quelle est la probabilité qu'elle sera sans erreur ?*

<u>Solution</u> :

Soit Xa, le nombre quotidien d'erreurs par page d'Anaïs, Xa ~Po(3) et

soit Xb, le nombre quotidien d'erreurs par page de Bertrand, Xb ~Po(4).

Soit les événements :

> A = « *La page est dactylographiée sans erreur.* » ;
>
> An = « *Anaïs dactylographie la page*. » ;
>
> Bt = « *Bertrand dactylographie la page.* ».

On sait que P(An) = P(Bt) = 0,5

et {An, Bt} forme un SCE (système complet d'événements).

On cherche P(A).

Par la loi des probabilités totales :

P(A).= P(Xa=0/An).P(An) + P(Xb=0/Bt).P(Bt) = (0,050.0,5)+(0,018.0,5) = 0,034.

Exercice 6.8 : Gardes à l'hôpital :

Durant le week-end, normalement, un seul chirurgien de garde est présent aux urgences de l'Hôpital Saint Sang et il suffit d'habitude à la tâche.
Cependant, il s'avère que des vies humaines sont en jeu si le temps d'attente avant traitement est trop élevé. Les responsables de l'hôpital ont estimé que c'était le cas si plus de 5 personnes se présentaient en une heure aux urgences. Dans ce dernier cas, on appelle chez lui, un autre médecin. Si vraiment le flux des patients est trop grand (plus de 10 personnes à l'heure), on appelle alors en renfort un troisième médecin.
Au cours des 20 derniers week-ends pour lesquels on a conservé des données précises, on a pu calculer que le taux moyen d'arrivées aux urgences était de 3 personnes par heure.

a. *On vous demande de calculer, pour le week-end prochain, quelle est la probabilité de devoir faire appel à un autre médecin et à deux autres médecins au cours d'une heure donnée.*

b. *Il est 9h10 du matin, ce samedi, le docteur DURZOT vient de prendre son service depuis 10 minutes et 3 personnes au moins sont déjà arrivées depuis aux urgences, victimes d'un accident. Quelle est la probabilité que durant les 50 minutes qui suivent, on doive faire appel en renfort à son collègue MOUZOT ?*

Solution :

Soit X, le nombre de personnes arrivant aux urgences en une heure, X ~Po(3).

Soit les événements :

2M = « *Faire appel à un second médecin.* » ;

3M = « *Faire appel à un troisième médecin*. » ;

a. On cherche $P(2M) = P(X > 5)$ et $P(3M) = P(X > 10)$.

$P(2M) = P(X > 5) = 1 - F(5)$ ou $P(6) + P(7) + P(8) + \ldots =$

$$0{,}05 + 0{,}022 + 0{,}008 + 0{,}003 + 0{,}001 + \ldots = 0{,}084.$$

$P(3M) = P(X > 10) = 1 - F(10)$ ou $P(11) + P(12) + \ldots = 0$.

b. On cherche $P(2M/\ X \geq 3) = P(2M \cap X \geq 3)/P(X \geq 3)$ (loi des probabilités composées), or $2M = X > 5$ et $X > 5 \Rightarrow X \geq 3$, donc $\{X > 5\} \subset \{X \geq 3\}$ et $2M \subset \{X \geq 3\}$, donc $P(2M/\ X \geq 3) = P(2M)/P(X \geq 3) = 0{,}084/0{,}577 = 0{,}145$.

Exercice 6.9 : Brouillard sur le viaduc :

Le viaduc de ZEEB sur l'autoroute F114 a une fâcheuse propension à se couvrir d'un brouillard dense les matins d'automne et de printemps. Les risques d'accident y sont élevés. Les statistiques établies les années précédentes indiquent, pour chaque sens de circulation (Nord-Sud et Sud-Nord), une probabilité de 40% de survenance d'au moins un accident au cours de la journée par temps de brouillard.

On vous demande, pour un jour où le brouillard est dense sur le viaduc :

1. *Quelle est la probabilité qu'aucun accident ne se produise sur le viaduc ?*
2. *Quelle est le nombre d'accidents sur le viaduc auquel on peut s'attendre par un jour de brouillard ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'un accident au moins se produise sur le viaduc ?*
4. *Considérant maintenant uniquement le sens de circulation Nord-Sud, quelle est la probabilité d'observer au moins une collision en chaîne, sachant que les risques d'observer au moins un tel accident dans ce sens de circulation par temps de brouillard sont de 10% quand le temps est couvert et de 30% quand le ciel est clair ? Les statistiques météorologiques prévoient 120 jours de temps couvert et 60 jours de ciel clair par an durant les périodes habituelles d'apparition du brouillard sur le viaduc.*

Solution :

1. Soit X, une variable aléatoire représentant le nombre quotidien d'accidents sur le viaduc, X ~Po, idem pour X_{NS} et X_{SN} se rapportant à chacun des deux sens. On sait que : (i et j = S,N avec i ≠ j), $P(X_{ij} > 0) = 1 – P(X_{ij} = 0) = 0,4$.
   Donc pour chaque sens de circulation : $P(X_{ij} = 0) = 0,6$.
   Donc pour les deux sens de circulation :
   $P(X = 0) = P[(X_{NS}=0) \cap (X_{SN}=0)] = 0,6^2 = 0,36$.
2. On cherche E(X), sachant que X ~Po et P(0) = 0,36. On sait que E(X) = θ, le paramètre de la distribution ; donc (cfr tables), P(0) = 0,368 pour θ = 1 ou plus précisément, il faut $0,36 = e^{-\theta}$ ou $\ln(0,36) = -\theta$ donc $\theta = 1,0217 = E(X)$.
3. P(X > 0) = 1 – P(X = 0) = 1 - 0,36 = 0,64.
4. Soit *CC* : « *Observer au moins une collision en chaîne dans le sens Nord-Sud.* », *B* : « *Le brouillard est dense sur le viaduc.* », *TC* : « *Le temps est couvert.* » et *TCL* : « *Le temps est clair.* »
   On sait $P(CC/TC \cap B) = 0,10$ et $P(CC/TCL \cap B) = 0,30$ ainsi que
   $P(TC \cap B) = 120/180 = 2/3$ et $P(TCL \cap B) = 60/180 = 1/3$.
   $P(CC \cap B) = P(CC/TC \cap B).\ P(TC \cap B) + P(CC/TCL \cap B).\ P(TCL \cap B) =$
   $0,10.2/3 + 0,30.1/3 = (0,2 + 0,3)/3 = 0,5/3 = 1/6 = 0,166666…$

EXERCICES RECAPITULATIFS (1)

Ex. rec.(1). 1 : Contrôle de qualité (I).

Une production en série présente en moyenne 5 % de produits défectueux.
Un contrôle est effectué sur un lot de 100 articles choisis au hasard.

1) *Quelle est la probabilité pour y trouver exactement 3 articles défectueux ?*
2) *Quelle est la probabilité pour y trouver moins de 5 articles défectueux ?*
3) *Déterminer le plus petit nombre entier k tel que la probabilité de trouver dans le lot au moins k articles défectueux soit inférieure à 20 %.*

Solution :

Puisque n (le nombre d'épreuves : c'est-à-dire de tests de défectuosité) est grand, X, la v.a.d. (nombre de produits défectueux) ~Bi.

X ~Bi(100, 0,05). Or n > 50 et $n.\theta_B = 5 \leq 5 \Rightarrow$ on peut utiliser la distribution de Poisson comme approximation de la distribution binomiale.

$$\Rightarrow X \sim Po(5) \Rightarrow P(k) = e^{-5}.5^k/k\,!$$

1) On cherche P(3) = (tables) 0,14 ou (par application de la formule) = $e^{-5}.5^3/3!$
2) On cherche F(4) = (tables) 0,44 ou par application de la formule récursive et sommations successives de la formule :

   $P(0) = \quad e^{-5} \quad = 0{,}0067.$

   $P(1) = P(0).(5/1) = 0{,}0337.$

   $P(2) = P(1).(5/2) = 0{,}0842.$

   $P(3) = P(2).(5/3) = 0{,}1404.$

   $P(4) = P(3).(5/4) = 0{,}1755.$

   $\Rightarrow F(4) = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 + 0{,}1404 + 0{,}1755 = 0{,}4405.$

3) On cherche k : $P(X \geq k) < 0{,}2$ ou k : $1 - F(k-1) < 0{,}2$ ou k : $F(k-1) > 0{,}8$.

Extrait de la table de la fonction de répartition de la distribution de Poisson

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
θ = 5	0,007	0,04	0,125	0,265	0,44	0,616	0,762	0,867	0,932	0,968

F(k-1) > 0,8 pour k-1 = 7, donc il y a moins d'une chance sur 5 (P < 0,2) d'obtenir un nombre de produits défectueux supérieur ou égal à 8 sur les 100 choisis au hasard.

Ex. rec.(1). 2 : Efficacité d'un médicament.

Le nombre de rhumes attrapés par un individu en l'espace d'un an est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Admettons qu'un remède (vaccin à base de vitamine c) soit lancé sur le marché et qu'il abaisse le paramètre λ à 3 pour 75 % de la population. Pour les 25 derniers pourcents, le remède n'a pas d'effets significatifs.
Un individu essaie le vaccin et en l'espace d'un an contracte 2 rhumes.

Quelle est la probabilité que le vaccin ait un effet sur lui ?

Solution :

Soit E = « *Le vaccin a un effet.* », P(E) = 0,75 ; donc P(~E) = 0,25.

Soit E/2 = « *Le vaccin a un effet même si on a contracté deux rhumes.* ».

Soit X, une V.A.D. correspondant aux nombre de rhumes contractés par l'individu en l'espace d'un an . X ~Po(λ).

Donc, si E, P(2/E) = 0,224 (voir tables de Poisson avec $\lambda = 3$).

Et si ~E, P(2/~E) = 0,084 (voir tables de Poisson avec $\lambda = 5$).

On cherche P(E/2). La formule de Bayes s'applique.

P(E/2) = (0,224*0,75)/[(0,224*0,75) + (0,084*0,25)]= 0,168 / 0,189 = 0,89.

Ex. rec.(1). 3 : Dates d'anniversaire : variante.

Combien de personnes faut-il au minimum avec moi pour que au moins l'une d'entre elles ait son anniversaire le même jour que moi ? (Avec une probabilité ≥ ½).

Solution :

Chaque personne est supposée avoir son anniversaire de façon équiprobable l'un des 365 jours de l'année.

Avec n personnes présentes en plus que moi, il est possible de constituer n paires de personnes me comprenant. Les n paires peuvent être numérotées j, j = 1, 2, 3, …, n.

L'épreuve E_j sera considérée comme un succès si la personne j et moi-même avons la même date d'anniversaire. Donc $P(E_j) = 1/365$.

Si les épreuves sont indépendantes, et puisque $P(E_j)$ est faible, le nombre de succès X est une v.a.d. approximativement distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\theta = n.\ P(E_j) = n/365$. $P(0) = e^{-n/365}$.

On cherche $P(X\geq1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-n/365}$ et il faut $P(X\geq1) \geq ½$.

$\Rightarrow 1 - e^{-n/365} \geq ½ \Rightarrow e^{-n/365} \leq ½ \Rightarrow e^{n/365} \geq 2 \Rightarrow \ln(e^{n/365}) \geq \ln(2)$

$\Rightarrow n/365 \geq \ln(2) \Rightarrow n \geq 365.\ln(2) \Rightarrow n \geq 365.0,6931 \Rightarrow n \geq 252,9987 \Rightarrow n \geq 253.$

<u>Ex. rec.(1). 4 :</u> Test de médicament.

Un laboratoire a mis au point un test pour dépister une certaine maladie.

Des essais cliniques prouvent que :

a) 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la maladie est effectivement présente.

b) 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la maladie n'est pas présente.

Dans une population comptant 3 % de malades, on pratique le test sur une personne choisie au hasard et on constate un résultat positif.

Quelle est la probabilité que la personne soit atteinte de la maladie ?

<u>Solution</u> :

Soit M : « *Etre malade*. » et Pos : « *Le résultat du test est positif*. ».

On sait que $P(Pos/M) = 0{,}96$; $P(\overline{Pos}/\overline{M}) = 0{,}94$; $P(M) = 0{,}03$ et $P(\overline{M}) = 0{,}97$.

On cherche $P(M/Pos)$. Deux approches de la solution sont proposées.

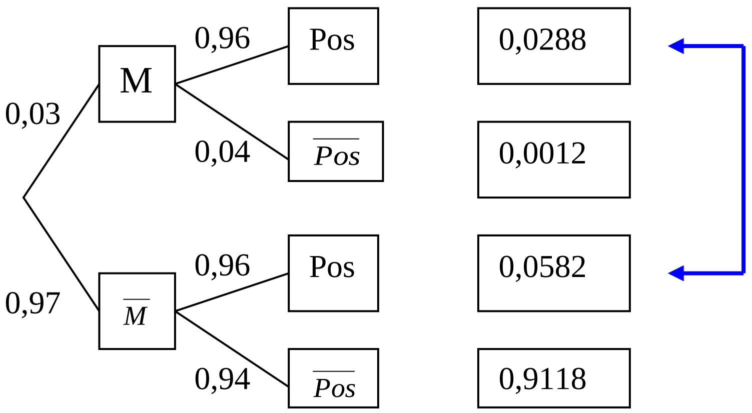
1. <u>Par la formule de Bayes :</u>

$$P(M/Pos) = \frac{P(Pos/M).P(M)}{P(Pos/M).P(M) + P(Pos/\overline{M}).P(\overline{M})}$$

$$= \frac{0{,}96.0{,}03}{(0{,}96.0{,}03) + (0{,}06.0{,}97)} = \frac{0{,}0288}{0{,}0288 + 0{,}0587} = 0{,}331$$

2. <u>Une autre approche : diagramme en arbre, loi des probabilités composées, probabilités jointes :</u>

Etat de la personne | Résultat du test | Probabilités jointes



$P(Pos) = 0{,}087$.

Donc $P(M/Pos) = P(M \cap Pos)/P(Pos) = 0{,}0228/0{,}087 = 0{,}331$.

Donc, le test est peu fiable vu la faible proportion de malades dans la population.

Ex. rec.(1). 5 : Triage de fruits.

Une usine de conserverie vient de recevoir un lot de fruits dont 10 % sont impropres à la cuisson directe.
Les fruits bruts sont déversés sur un tapis roulant pour être triés indépendamment par deux inspectrices disposées en série. La première inspectrice détecte un mauvais fruit avec une probabilité de 0,9 ; la seconde plus expérimentée avec une probabilité de 0,95.

Quel pourcentage du tonnage reçu sera-t-il finalement écarté du processus de cuisson directe ?

Solution :

Un fruit parfait ne sera pas écarté, un fruit non parfait peut ne pas être écarté. Il est utile de calculer la probabilité que le fruit ait un défaut non remarqué et donc ne soit pas écarté alors qu'il le devrait.

On cherche P(D) avec D : « *Le fruit a un défaut et est écarté.* » ;

Soit : S : « *Le fruit est parfait.* » ;

A : « *Le fruit a un défaut non remarqué.* » ;

I_1 : « *Le fruit est écarté par l'inspectrice 1.* » ;

I_2 : « *Le fruit est écarté par l'inspectrice 2.* » ;

${\sim}D = S \cup A$ et $S \cap A = \varnothing$;

$A = {\sim}S \cap {\sim}I_1{:}\cap {\sim}I_2$, par l'indépendance.

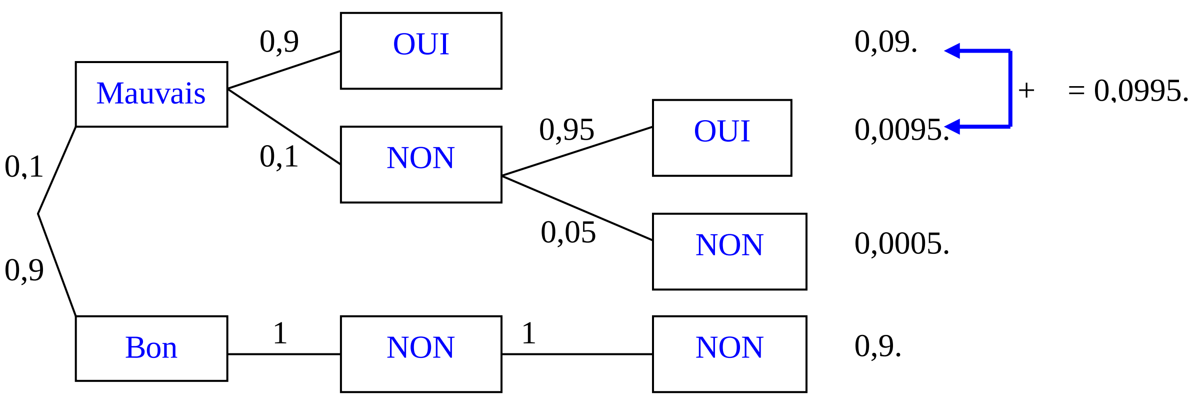
P(A) = P(${\sim}S$).P(${\sim}I_1$).P(${\sim}I_2$) = (1-0,9).(1-0,9).(1-0,95) = 0,1.0,1.0,05 = 0,0005.

P(${\sim}D$) = P(S) + P(A) = 0,9 + 0,0005 = 0,9005.

Donc P(D) = 1-P(${\sim}D$) =1- 0,9005 = 0,0995 = 9,95%.

Une autre approche : diagramme en arbre, probabilités jointes :

Etat du fruit	Rejet par I_1	Rejet par I_2	Probabilités jointes



Ex. rec.(1). 6 : Accidents d'avion.

Le nombre moyen d'accidents d'avions commerciaux par mois dans le monde est de 3,5.

Quelle est la probabilité qu'il y ait :

a) au moins 2 accidents le mois prochain ?

b) au plus 1 accident ?

Justifiez !

Solution :

Vu la faible probabilité d'un accident individuel, on peut considérer X, le nombre mensuel d'accidents d'avions commerciaux dans le monde , comme une v. a. d ; ~Po(3,5).

a) Donc $P(X \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) =$

$1 - e^{-3,5} - [e^{-3,5}.\ 3,5] = 1\text{-}0,03\text{-}0,106 = 0864.$

b) On cherche $P(X \leq 1) = F(1) = P(0) + P(1) = 1 - P(X \geq 2) = 0,136.$

Ex. rec.(1). 7 : Le concours de tir.

Lors d'un concours de tir, un tireur dispose de 4 coups pour toucher une cible.

A chaque coup tiré, sa précision s'améliore de telle sorte que la probabilité de toucher la cible au X$^{\text{ème}}$ coup : $P(X) = 0{,}4 + 0{,}1X$.

Solution :

a) *Quelle est la probabilité qu'il ne touche la cible qu'une seule fois, P(1) ?*

L'ensemble des événements favorables à la réalisation d'un seul succès sur les 4 possibles peut être décrit par : {A, B, C, D} =
{(A∩~B∩~C∩~D), (~A∩B∩~C∩~D), (~A∩~B∩C∩~D), (~A∩~B∩~C∩D)},
avec *A, B, C, D* : « *Toucher la cible au (resp.) 1er, 2ème, 3ème, 4ème coup.* ».

Ces événements A, B, C, D, sont incompatibles deux à deux.

On suppose en outre que *A, B, C, D* sont indépendants (et donc leurs complémentaires).

Donc P(*1*) = P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = (0,5.0,4.0,3.0,2) + (0,5.0,6.0,3.0,2) + (0,5.0,4.0,7.0,2) + (0,5.0,4.0,3.0,8) = 0,106.

b) *Quelle est la probabilité pour qu'en 4 coups, un tir au moins atteigne la cible, P(S) ?*

Soit *E* : « *Aucun tir n'atteint la cible.* », *E* = (~A∩~B∩~C∩~D), donc P(*E*) = 0,5.0,4.0,3.0,2 = 0,012.

Donc P(*S*) = 1 - P(*E*) = 1- 0,012 = 0,988.

c) *Quelle est la probabilité pour qu'en 4 coups, 2 coups au moins touchent la cible ? P(2S) ?*

P(*2S*) = 1 - P(*E*) - P(*1*) = 1- 0,012 – 0,106 = 0,882.

d) *Quelle est la probabilité pour que les 4 coups touchent la cible ? P(4S) ?*

P(*4S*) = P(A∩B∩C∩D) = 0,5.0,4.0,3.0,2 = 0,168.

e) *Quelle est la probabilité pour que 3 coups au moins atteignent la cible ? P(3S) ?*

P(*3S*) = P(*3*) + P(*4S*).

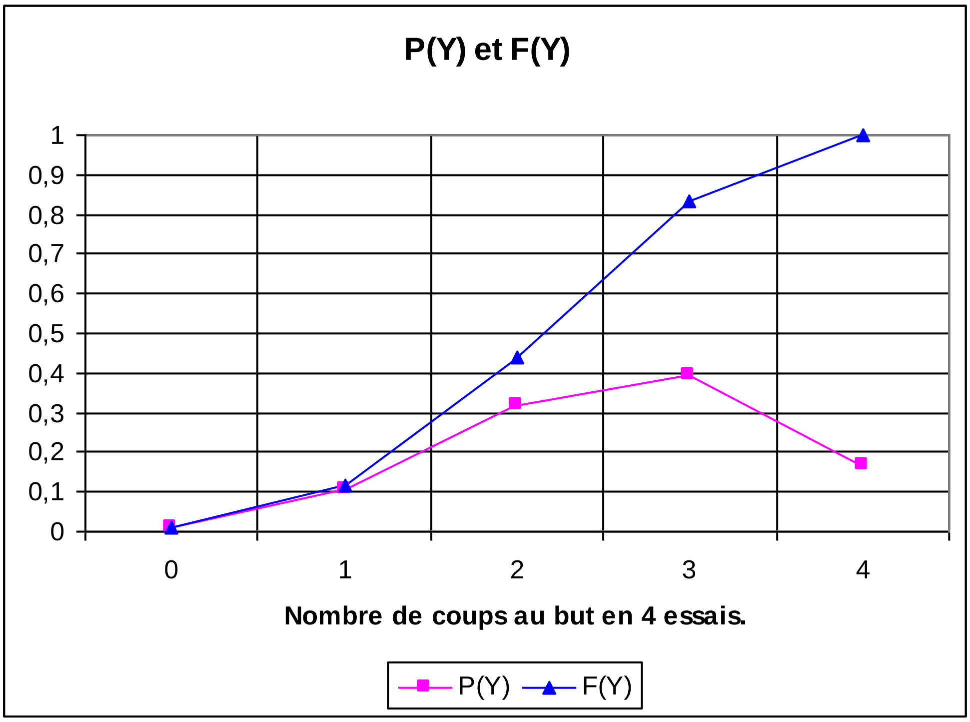
P(*3*) = P{(A∩B∩C∩~D), (A∩B∩~C∩D), (A∩~B∩C∩D), (~A∩B∩C∩D)} = (0,5.0,6.0,7.0,2) + (0,5.0,6.0,3.0,8) + (0,5.0,4.0,7.0,8) + (0,5.0,6.0,7.0,8) = 0,042 + 0,072 + 0,112 + 0,168 = 0,394 ⇒ P(*3S*) = 0,394 + 0,168 =0,562.

f) Si Y est une V.A. représentant le nombre de coups au but, quelle est la distribution de probabilité de Y ? Sa fonction de répartition ? E(Y) ? Représenter graphiquement la distribution de probabilités et la fonction de répartition.

Y	P(Y)	F(Y)	Commentaires
0	0,012	0,012	= P(*E*)
1	0,106	0,118	= 1 – P(*2S*)
2	**0,320**	0,438	= 1 – P(*3S*)
3	0,394	0,832	= 1 – P(*4*)
4	0,168	1	

P(2) = 1 – P(1) – P(3) – P(4) = 1 – 0,012 – 0,394 – 0,168 = 0,320.

E(Y) = (0.0,012) + (1.0,106) + (2.0,320) + (3.0,394) + (4.0,168) = 2,6 succès.



Ex. rec.(1). 8 : Le Q.C.M.

Dans un Q.C.M. 4 réponses alternatives sont proposées pour chaque question, dont une seule est correcte.

Une étudiante a la probabilité θ ($0 < \theta < 1$) de connaître la réponse correcte. Si elle ne connaît pas la réponse, elle choisit une des 4 possibilités au hasard.

Solution :

Q.1. Quelle est la probabilité qu'elle donne la réponse correcte ?

Soit : C : « *L'étudiante répond correctement.* » , K : « *L'étudiante connaît la réponse.* »., $\{K, \sim K\}$ forme un SCE. On sait que $P(K) = \theta$ et donc $P(\sim K) = 1 - \theta$.

Donc si elle choisit une réponse au hasard quand elle ne connaît pas la réponse, $P(C/\sim K) = 0,25$.

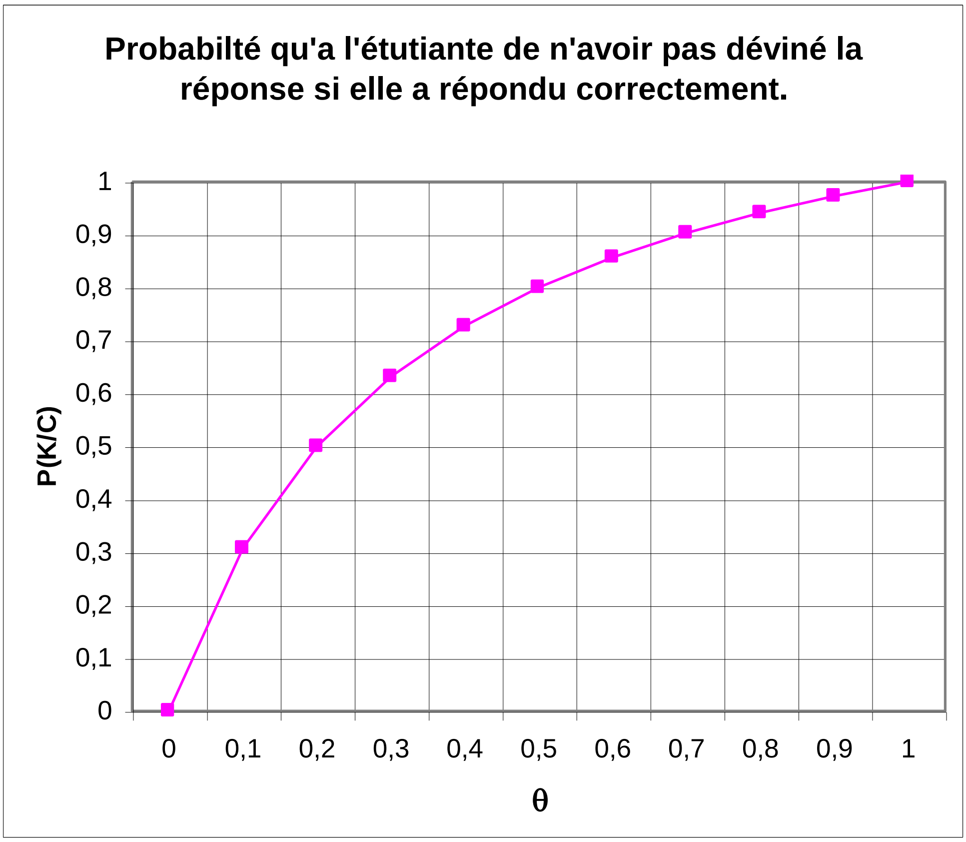
Donc $P(C) = P(C/K).P(K) + P(C/\sim K).P(\sim K) = 1.\theta + 0,25.(1-\theta) = 0,75\theta + 0,25$.

Q.2. Etant donné qu'elle donne la réponse correcte, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas deviné ?

On cherche $P(K/C) =$ (LPC) $P(K \cap C)/P(C) =$

$P(C/K).P(K)/P(C) = \theta/(0,75\theta + 0,25) = 4\theta/(3\theta + 1)$.

Q.3. Représentez graphiquement l'évolution de la probabilité qu'elle n'ait pas deviné pour toutes les valeurs possibles (au $10^{ème}$ près) de θ.



Ex. rec.(1). 9 : Fiabilité de matériel (I).

Une machine automatique est constituée de 50 éléments. On admet que pendant un temps T de fonctionnement, chacun des éléments a une probabilité 0,01 de tomber en panne indépendamment des autres. La machine cesse de fonctionner si au moins quatre des éléments tombent en panne.
Quelle est la probabilité que la machine tombe en panne durant le temps T ?

Solution :

Soit X, une v.a.d., = « *Le nombre d'éléments en panne.* », X ~Bi(50, 0,01).

Puisque n = 50 ($\geq$ 50) et $n.\theta_B$ = 50.0,01 = 0,5 < 5, on peut utiliser une approximation par la loi de Poisson.

La machine tombe en panne si X > 3 et est donc en état de fonctionnement si X $\leq$ 3.

$P(X \leq 3) = F(3)$ = (tables) 0,998. Donc la probabilité que la machine tombe en panne durant la période T = $P(X>3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}998. = 0{,}002$.

Ex. rec.(1). 10 : Fiabilité de matériel (II).

Une machine industrielle comprend 5 éléments dont la probabilité de fonctionnement de chacun d'eux, pendant un temps donné T est 0,95. La machine cesse de fonctionner dès que deux au moins des cinq éléments sont en panne.

a) *Calculer la probabilité de panne de cette machine pendant le temps T.*

b) Supposons que T = 1 jour de travail ; si une année compte 200 jours de travail, *combien de jours en moyenne sur l'année seront-ils marqués par une panne?*

c) Solution :

a) Soit X, une v.a.d., = « *Le nombre d'éléments en panne.* », X ~Bi(5, 0,05).

On cherche $P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - P(0) - P(1) =$

$1 - C_5^0\ 0{,}05^0.0{,}95^5 - C_5^1\ 0{,}05^1.0{,}95^4 = 1 - 0{,}95^5 - (5.0{,}05.(0{,}95)^4)) = 0{,}0226.$

b) Suivant l'approche fréquentiste, le nombre de jours durant lesquels la machine connaîtra une panne = 0,0226 .200 = 4,52 jours.

Ex. rec.(1). 11 : **Contrôle de qualité (II).**

On sait que les disquettes produites par une certaine firme sont défectueuses avec une probabilité de 0,01, indépendamment les unes des autres. La compagnie vend les disquettes par boites de 10 et garantit contre remboursement qu'au plus 1 des 10 disquettes de la boite est défectueuse.

A l'achat de 3 boites, quelle est la probabilité qu'une boite :

a) au moins doive être remboursée ?

b) exactement doive être remboursée ?

Solution :

Soit D : « *La disquette est défectueuse.* », B_iD : « *La boîte i contient plus d'une disquette défectueuse et doit donc être remboursée.* », B_iND : « *La boîte i contient au plus une disquette défectueuse et ne doit donc pas être remboursée.* », i = 1, 2, 3 ; X, une v.a.d., représentant *le nombre de disquettes défectueuses dans une boîte*. On sait que $P(D) = 0{,}01$. Donc $X \sim Bi(10 ; P(D)) \Rightarrow X \sim Bi(10 ; 0{,}01)$.

$P(B_iD) = P(X > 1) = 1 – P(0) – P(1)\ \forall i,\ i = 1, 2, 3.$

or $P(0) = C_{10}^{0}\ 0{,}01^{0}.0{,}99^{10} = 0{,}9044.$

Et $P(1) = C_{10}^{1}\ 0{,}01^{1}.0{,}99^{9} = 0{,}0914.$

Donc $P(B_iD) = 1 - 0{,}9044 - 0{,}0914 = 0{,}0042$ et $P(B_iND) = 1 - P(B_iD) = 0{,}9958$ $\forall i$ car $\{ B_iD, B_iND\}$ forme un SCE.

a. On cherche $P(A)$, avec A : « *Une boîte au moins sera remboursée sur un achat de trois boîtes.* »,

$P(A) = P(B_1D \cup B_2D \cup B_3D) = 1 - P(B_1ND \cap B_2ND \cap B_3ND) = 1 - (0{,}9958)^3 = 1 - 0{,}9875 = 0{,}0125.$

b. On cherche $P(B)$, avec B : « *Une seule boîte sera remboursée sur un achat de trois boîtes.* »,

$P(B) = P[(B_1D \cap B_2ND \cap B_3ND) \cup (B_1ND \cap B_2D \cap B_3ND) \cup (B_1ND \cap B_2ND \cap B_3D)] = 3.\ P(B_iD).[P(B_iND)]^2 = 3.\ 0{,}0125.\ 0{,}9958^2 = 0{,}0125.$

Ex. rec.(1). 12 : Le recyclage du verre (I).

De petites particules de matières étrangères peuvent être trouvées dans le verre fondu provenant du groisil à partir duquel les bouteilles de verre sont faites.

Si une seule de ces particules est incorporée dans une bouteille, la bouteille doit être détruite.

Supposons que 10 bouteilles sont produites d'une certaine quantité de verre fondu dans lequel deux de ces particules sont dispersées aléatoirement.

Quel est le nombre de bouteilles que l'on devra détruire ?

Solution :

Chaque particule a une chance égale d'être incorporée dans chacune des 10 bouteilles. Ce qui veut dire qu'il existe 10 façons d'incorporer la première particule et 10 façons d'incorporer la seconde, soit au total 10.10 = 100 façons d'incorporer les deux particules parmi les 10 bouteilles.

Dans 10 de ces cas, les deux particules sont incorporées dans la même bouteille. Dans les 90 autres cas, deux bouteilles sont contaminées au lieu d'une seule dans le cas précédent.

Soit X, une v.a.d., = « *Le nombre de bouteilles contaminées par au moins une particule*. ». L'intervalle de X, I = {1, 2} et il est possible d'écrire la distribution de probabilité de X à partir de la formule classique :

X	1	2
P(X)	1/10	9/10

Donc E(X) = 0.0 + 1.0,1 + 2.0,9 = 1,9 bouteilles à détruire.

Ex. rec.(1). 13 : Le recyclage du verre (II).

Suite à un problème de réglage de la machine automatique de tri optique du groisil, trois particules se trouvent dispersées dans la quantité de verre fondu nécessaire pour produire 10 bouteilles.

Quel est le nombre de bouteilles qu'il faudra détruire ?

Solution :

Chaque particule a une chance égale d'être incorporée dans chacune des 10 bouteilles. Ce qui veut dire qu'il existe 10 façons d'incorporer la première particule, 10 façons d'incorporer la seconde et 10 façons d'incorporer la troisième ; soit au total 10.10.10 = 1000 façons d'incorporer les trois particules parmi les 10 bouteilles.

Dans 10 de ces cas, les trois particules sont incorporées dans la même bouteille.

Il y a 10.9.8 = 720 possibilités que les trois particules se trouvent dans une bouteille différente, contaminant donc 3 bouteilles sur les 10.

Il reste 1000 – 10 – 720 = 270 (= 3.10.9) possibilités de contaminer 2 bouteilles sur 10 avec 3 particules : 1 dans une bouteille et 2 dans une autre.

Le calcul direct du nombre de cas favorable à la contamination de 2 bouteilles sur les 10 est plus complexe : une configuration favorable consiste à trouver 2 particules dans une bouteille parmi les trois et l'autre dans une autre. Il existe $C_3^2. = 3$ possibilités d'arranger 2 particules dans une bouteille parmi les trois et donc il y a 3.10 = 30 possibilités de contaminer une bouteille avec deux particules ; ces 30 possibilités sont à associer par le principe de multiplication aux 9 possibilités de contaminer une autre bouteille avec la particule restante, soit 30.9 = 270 possibilités de contaminer 2 bouteilles avec 3 particules

Soit X, une v.a.d., = « *Le nombre de bouteilles contaminées par au moins une particule*. ». X a comme intervalle I = {1, 2, 3}. Il est possible d'écrire la distribution de probabilité de X à partir de la formule classique :

X	1	2	3
P(X)	10/1000 = 0,01	270/1000 = 0,27	720/1000 = 0,72

Donc E(X) = 0.0 + 1.0,01 + 2.0,27 + 3.0,72 = 2,71 bouteilles à détruire.

Ex. rec.(1). 14 : **Stop ou en avant.**

Supposons le jeu de dé suivant : à votre tour, vous lancez le dé (supposé honnête). Si vous obtenez 6, vous avancez de six cases. Si vous obtenez un autre résultat que 6, votre pion reste sur place.

De combien de cases vous déplacez-vous en moyenne à chaque lancer ?

Solution :

Soit X, une v.a.d., représentant le résultat d'un lancer de dé et g(X), le nombre de cases dont on avance après chaque lancement du dé.

E[g(X)] sera donc le nombre attendu de cases dont on avancera à chaque lancer.

Le tableau suivant présente les distributions de probabilité pour X et g(X).

X	1	2	3	4	5	6
g(X)	0	0	0	0	0	1
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Donc $E[g(X)] = \frac{1}{6}.(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6) = 1$ case.

Ex. rec.(1). 15 : Fiabilité de matériel (III).

Une machine comprend quatre dispositifs D1, D2, D3, D4, dont la défaillance peut intervenir de manière indépendante. On observe le fonctionnement de la machine pendant un intervalle de temps T (temps de fiabilité). Soit Ai, $1 \leq i \leq 4$, l'événement : "*Di , fonctionne sans défaillance pendant le temps T*" avec la probabilité P(Ai). On suppose que : P($A1$) = 0,8 ; P($A2$) = 0,85 ; P($A3$) = 0,9 ; P($A4$) = 0,9.

La machine tombe en panne si D_1 tombe en panne. Elle continue de fonctionner si un seul de ces trois dispositifs D_2, D_3, D_4 est défaillant; mais la défaillance simultanée de deux au moins de ces trois dispositifs met la machine en panne.

Quelle est la probabilité de fonctionnement de la machine durant T (probabilité de fiabilité) ?

Solution :

Soit A : « *La machine fonctionne pendant T.* » ;

A =

$[(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap \sim A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \sim A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \sim A_4)]$,

donc A est la réunion de 4 événements composés incompatibles entre eux deux à deux. Chacun de ces événements composés est l'intersection de 4 événements indépendants donc :

P(A) =

$P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4) + P(A_1).P(\sim A_2).P(A_3).P(A_4) + P(A_1).P(A_2).P(\sim A_3).P(A_4) + P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(\sim A_4) =$

(0,8.0,85;0,9.0,9) + 0,8.0,15.0,9.0,9) + [(0,8.0,85.0,1.0,9).2] = 0,7704.

Ex. rec.(1). 16 : **Contrôle de qualité (III).**

Deux machines x et y fabriquent des ampoules. X assure 30 % de la production et 5 % des ampoules qu'elle fabrique sont défectueuses. Y assure 70 % de la production, et 3 % des ampoules qu'elle fabrique sont défectueuses.

Q.1. On choisit une ampoule au hasard dans la production totale.
Quelles sont les probabilités pour que :
a) l'ampoule soit produite par x et défectueuse ?
b) l'ampoule soit produite par y et non défectueuse ?

Solution :

Soit X : « *L'ampoule est fabriquée par x.* » ; on sait que $P(X) = 0,3$.

Soit Y : « *L'ampoule est fabriquée par y.* » ; on sait que $P(Y) = 0,7$.

Soit D : « *L'ampoule est défectueuse.* » ;
on sait que $P(D/X) = 0,05$ et . $P(D/Y) = 0,03$.

On cherche $P(X \cap D)$ et $P(Y \cap \sim D)$. On applique la LPC.

a. $P(X \cap D) = P(D/X).P(X) = 0,05.0,3 = 0,015$.

b. $P(Y \cap \sim D) = P(\sim D/Y).\ P(Y) = (1 - 0,03).0,7 = 0,679$.

Q.2. *Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?*

Solution :

On cherche $P(D)$. On applique la LPT, en effet $\{X,Y\}$ forme un SCE.

$P(D) =$

$P(D/X).P(X) + P(D/Y).P(Y) = 0,05.0,3 + 0,03.0,7 = 0,015 + 0,021 = 0,036$.

Q.3. *Si l'ampoule est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle soit produite par x ? Par y ?*

Solution :

On cherche $P(X/D)$ et $P(Y/D)$. On applique la formule de Bayes.

a. $P(X/D) = P(X \cap D)/P(D) = 0,015/0,036 = 0,4167$.

b. $P(Y/D) = P(Y \cap D)/P(D) = 0,021/0,036 = 0,5833 = 1 - P(X/D)$.

Ex. rec.(1). 17 : Contrôle de qualité (IV).

Dans une usine, 4 % des composants électroniques fabriqués sont défectueux. Un inspecteur teste chaque composant avant qu'il ne quitte l'usine. Il rejette incorrectement 2 % des composants non-défectueux et laisse passer 1 % des composants défectueux.

a) *Quelle proportion de tous les composants produits est-elle rejetée ?*

b) *Etant donné qu'il rejette un composant, quelle est la probabilité qu'il soit non défectueux ?*

Solution :

Soit D : « *Le composant est défectueux.* » et R : « *Le composant est rejeté.* ».

On sait que :

$P(D) = 0{,}04$; $P(R/\sim D) = 0{,}02$; $P(\sim R/D) = 0{,}01 \Rightarrow P(R/D) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

On cherche $P(R)$. $P(R) =$ (LPT) $P(R/D).P(D) + P(R/\sim D).P(\sim D) =$

$0{,}99.0{,}04 + 0{,}02.(1- 0{,}04) = 0{,}0492$. Soit près de 5 %.

On cherche également $P(\sim D/R)$.

$P(\sim D/R) =$ (Bayes) $[P(R/\sim D).P(\sim D)]/P(R) = 0{,}02.0{,}96/0{,}0492 = 0{,}39$.

Ex. rec.(1). 18 : Les jeunes conducteurs.

Dans une région donnée, 40% des conducteurs masculins d'automobiles sont responsables d'un accident. Il y a 75 % de jeunes hommes (de moins de 30 ans) parmi les conducteurs masculins responsables d'accidents et 20 % de jeunes parmi les conducteurs masculins non responsables d'accidents.

Quelle est la probabilité qu'un jeune homme (de moins de 30 ans)de cette région, pris au hasard, cause un accident ?

Solution :

Pour la population masculine, on pose :

A = « *Causer un accident.* »,

J = « *Etre jeune.* ».

On connaît : $P(A) = 0{,}4$, donc $P(\tilde{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$.

$P(J/A) = 0{,}75$ et $P(J/\tilde{A})=0{,}20$.

On demande $P(A/J)$.

Or $P(A/J) =$ (Bayes) $[P(J/A).P(A)]/[P(J/A).P(A) + P(J/\tilde{A}).P(\tilde{A})] =$

$(0{,}75.0{,}4)/[(0{,}75.0{,}4) + (0{,}2.0{,}6)] = 0{,}3/0{,}42 = 0{,}72$.

Ex. rec.(1). 19 : Ventes de chocolat.

K. RAMEL, épicier établi près d'une école, sait que tous les jours scolaires à midi il vend un certain nombre de friandises aux élèves. Pendant la dernière année scolaire, il a observé les fréquences suivantes de demande quotidienne pour une certaine tablette de chocolat :

Nombre de tablettes demandées/jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de jours pour lesquels cette demande a été observée	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21

Il pense qu'il connaîtra le même comportement de la demande l'an prochain.
Soit X, la variable aléatoire représentant le nombre de tablettes achetées quotidiennement.

a) Etablir le tableau et le graphique de la fonction de répartition de cette variable aléatoire.

b) Quelle est la quantité de tablettes que K. RAMEL peut raisonnablement penser vendre quotidiennement en moyenne l'an prochain ?

Solution :

a) X est une V.A.D. distribuée selon la loi uniforme parce que pr(X) = 21/210 = 0,1 : {X= 1, 2, 3, …10}.

b)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F(X)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

c) Il suffit de calculer l'espérance mathématique de X : E(X) = 1.0,1 + 2.0,1 + 3.0,1 + … + 10.0,1 = 55.0,1 = 5,5.

Ex. rec.(1). 20 : Le robot emballeur.

Dans une conserverie, les boites de conserves sont disposées en pallette en fin de chaîne par un seul robot emballeur.
Le robot travaille à la cadence normale de 25 palettes/heure. Il se fait qu'il faut exactement 25 palettes pour former un lot standard correspondant à la charge d'un camion semi-remorque.
Le fournisseur du robot emballeur garantit la fiabilité du robot en avançant un taux de 1/1000 de mauvais empaquetages.
Il suffit cependant d'une palette mal empaquetée pour perdre la vente du lot de 25 dans lequel la palette se trouve.
Le robot est renvoyé à l'usine pour révision générale après 10.000 heures de fonctionnement.

a) De combien de lots la conserverie manquera-t-elle la vente pour cause de mauvais empaquetage entre le moment où le robot est installé et son premier renvoi pour revision générale ?

b) Quelle proportion de la production ces lots dont la vente est perdue représentent-ils ?

c) Que deviennent ces conclusions si les clients acceptent tout au plus une palette mal empaquetée par lot ?

Solution :

a) Si le robot travaille 10.000 heures, il produira 10.000 lots de 25 palettes.

Soit R= « *Rejeter un lot*. ».

Soit X = nombre de palettes mal emballées sur un lot de 25.

P(R) = P(X>=1) = 1 – P(0).

Or X ~ Bi(25 ; 0,01) (Attention, ici on fait l'hypothèse d'un tirage avec remise !).

Donc P(0) = $(999/1000)^{25}$= 0,9753.

Donc P(R) = 1 – 0,9753 = 0,0247.

b) Donc sur 10.000 lots, on refusera 10.000 . 0,0247 = 247 lots.

c) Si pr(R) = pr(X>1) = 1 – pr(X=0) – pr(X=1) = 1 – 0,9753 – 0,0244 = 0,0003.

Donc le nombre de lots rejetés tombe à 10.000 . 0,0003 = 3.

Ex. rec.(1). 21 : Partage de bonbons.

Un sac opaque contient deux sortes de bonbons indiscernables au toucher. Il s'agit de F bonbons à la fraise et de C bonbons au citron. On demande à Julie d'en prendre un au hasard, c'est ensuite au tour de Jules.

Quelle est la probabilité que Jules prenne un bonbon à la fraise ? Jules ne sait pas quel bonbon Julie a pris. Justifiez en détail votre réponse.
N.B. On pose que F+C=N

Solution :

S={FF, CF, CC, FC} avec IJ, I = F,C et J = F, C, les choix consécutifs de Julie puis de Jules

Soit A={FF, CF}. A = « *Jules a pris un bonbon à la fraise.* ».

On cherche P(A).

Soit B={FF} et C={CF}

Donc P(A) = P(B $\cup$ C) = P(B) + P(C) puisque événements incompatibles.

P(B) = F/N* (F-1)/(N-1).

P(C) = C/N * F/(N-1).

Donc P(B)+P(C) = [(F*(F-1)) + (C*F)]/N*(N-1) = [F*(F-1+C)]/N*(N-1) = F*(N-1)/N*(N-1) = F/N.

Ex. rec.(1). 22 : Guidage de missile.

Le système de guidage d'un prototype de missile est constitué d'une tuyère directionnelle et de deux systèmes de pointage. La tuyère fonctionne grâce aux impulsions électriques reçues de l'un ou l'autre système de pointage.

Le missile reste opérationnel tant que la tuyère fonctionne.

Lors des essais préliminaires, il a été établi qu'au cours d'un vol de trois minutes, la tuyère avait une chance sur 10 de se désintégrer avant la fin du vol.

Le premier système de pointage, relativement fiable, ne tombe en panne que dans 5% des cas au cours des trois minutes de vol, le second système de pointage fonctionne lui dans 80% des cas. Le fonctionnement de chacun des deux systèmes est indépendant de l'autre.

Quelle est la probabilité pour que le vol inaugural de trois minutes devant l'Etat-major se passe sans accroc ?

Solution :

Soit A=« *La tuyère reste entière durant le vol.* ».

Soit B=« *Le premier système de pointage fonctionne durant tout le vol.* »

Soit C= « *Le deuxième système de pointage fonctionne durant tout le vol.* »

Soit D=« *Le missile réussit son vol inaugural.* ».

Donc on cherche $P(D)$.

Or $D= A \cap (B \cup C)$.

Calculer directement $P(B \cup C)$ est impossible car les événements ne sont pas incompatibles.

Il faut donc passer par l'événement complémentaire, en effet $P(B \cup C) = 1 - P(\sim B \cap \sim C) = 1 - P(\sim B)*P(\sim C)$.

Donc $P(D) = P(A) * [1 - P(\sim B)*P(\sim C)] = 0,9 * [1- (0,05*0,20)] = 0,9 * (1 - 0,01) = 0,9 * 0,99 = 0,891$.

Ex. rec.(1). 23 : Le questionnaire.

Lors d'une épreuve consistant à répondre à cinq questions, chacune proposant quatre réponses possibles dont une seule est correcte, vous répondez en choisissant les réponses purement au hasard.

Quelle est la probabilité que vous ayez au moins une réponse correcte ?
En supposant que vous gardiez la même stratégie, faut-il augmenter ou diminuer le nombre de questions pour augmenter la probabilité d'obtenir au moins une réponse correcte ? Justifiez.

Solution :

La probabilité de répondre correctement à au moins une question est égale à 1 moins la probabilité de ne répondre correctement à aucune question.

Soit A = « *Répondre correctement à au moins une question*. »

S={0, 1, 2, 3, 4, 5} où les nombres représentent le nombre total de réponses correctes obtenues.

Donc $P(A) = P(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5) = 1- P(0) = 1- (3/4)^5 = 1 - 243/1024 = 781/1024 = 0{,}7627$.

Il faut augmenter le nombre de questions puisque pour chaque nouvelle question ajoutée la probabilité de ne pas répondre est égale aux ¾ de la probabilité de ne pas répondre à ce même nombre de questions moins une. Celle probabilité diminue donc avec le nombre de questions.

Ex. rec.(1). 24 : Contrôle de qualité (V).

Une chaîne de fabrication de conserves produit des lots de 50 boîtes. Chacune des boîtes est soumise à contrôle par une inspectrice qui prélève 5 boîtes au hasard dans chaque lot pour les soumettre au test. Il suffit d'une seule boîte défectueuse pour rejeter le lot.

Si 3 boîtes sont défectueuses dans le lot de 50, quelle est la probabilité que le lot soit rejeté ?

Solution :

Soit A = « *Une boîte tirée au hasard dans le lot de 50 est défectueuse* .»

Donc $P(A) = 3/50 = 0{,}06$ et P(i) = la probabilité que la ième boîte tirée ne soit pas défectueuse = 0,94.

Soit B = « *Le lot est rejeté*. ».

$P(B) = 1 - P(\sim B)$ avec $P(\sim B) = P(1 \cap 2 \cap 3 \cap 4 \cap 5)$,

donc $P(B) = 1 - [(0{,}94)^5] = 0{,}2661$.

Ex. rec.(1). 25 : La cantine de l'école.

Dans la cantine d'une école secondaire, on sait que par jour de grande chaleur, 40% des élèves achètent une glace à la récréation de midi. Certains l'achètent parce qu'ils ont chaud, d'autres par imitation. On a également remarqué que les filles achètent proportionnellement plus de glaces que les garçons. Après de nombreuses observations, on a même pu établir que 75% des acheteurs de glaces étaient des filles et que 90% des non-acheteurs étaient des garçons. N.B. Personne n'achète deux ou plusieurs glaces.

a) Quelle est la probabilité qu'une fille choisie au hasard le matin d'un jour de grande chaleur achète une glace à midi ?

b) Quelle proportion de la population totale des élèves de l'école représente le groupe des garçons qui n'achètent pas de glaces ce même jour ?

c) Supposant que l'école compte 720 filles, quelle est la population totale de l'école ? Combien de glaces pense-t-on vendre au total à la cantine un jour de grande chaleur ?

Solution :

a) Soit G =« *L'élève achète une glace*. » et $\{G,\sim G\}$ un SCE.

Soit $\{F,B\}$ un SCE avec F=« *Etre une fille*. » et B=« *Etre un garçon*. ».

On cherche $P(G/F)$.

On a : $P(F/G) = 0{,}75$; $P(B/\sim G) = 0{,}9$ donc $P(F/\sim G) = 0{,}1$;
$P(G) = 0{,}4$; et $P(\sim G) = 1 - P(G) = 0{,}6$.

Donc (Bayes) $P(G/F) = [P(F/G).P(G)]/[\, P(F/G).P(G) + P(F/\sim G).P(\sim G)] =$
$[0{,}75*0{,}4]/[0{,}75*0{,}4 + 0{,}1*0{,}6] =$
$0{,}30/(0{,}30 + 0{,}06) = 0{,}30 / 0{,}36 = 5/6$.

b) On cherche $P(B\cap\sim G)$, le plus simple est de développer un diagramme en arbre, ou d'utiliser la formule des probabilités composées :

$P(B\cap\sim G) = P(B/\sim G).\, P(\sim G) = 0{,}9 * 0{,}6 = 0{,}54$ donc le groupe des garçons qui n'achètent pas de glaces ce jour là représente 54% de la population des élèves.

c) On cherche donc $P(F)$ = (loi des probabilités totales) = $P(F/G).P(G) + P(F/\sim G).P(\sim G) = 0{,}75*0{,}4 + 0{,}1*0{,}6 = 0{,}36$.

Donc les 720 filles représentent 36% de la population de l'école, donc la population de l'école = (720/36) * 100 = 2000 élèves. On vendra donc 40% de 2000 glaces par jour de grande chaleur, soit 800 glaces.

EXERCICES RECAPITULATIFS (2)

Ex. rec.(2). 1 : Programme de vaccination.

Dans l'école fondamentale du quartier, un cas d'hépatite vient de se déclarer chez Jules.

On craint une épidémie et tous les enfants doivent subir une injection de γ-globulines qui devrait les protéger de l'infection. A défaut, ils contracteraient à coup sûr la maladie.

On sait que l'injection est efficace dans 97% des cas où elle est réalisée.

Sachant que l'école compte 283 enfants régulièrement inscrits (donc y compris Jules et pour lequel l'injection ne peut avoir aucun effet),

a) *Quelle est la probabilité qu'aucun autre enfant ne contracte la maladie ?* 0,000186.
b) *Quelle est la probabilité qu'aucun autre enfant de la classe de Jules, classe qui compte 20 élèves régulièrement inscrits y compris Jules, ne contracte la maladie ?* 0,5606.
c) *La famille de Jules a quatre autres enfants inscrits dans cette même école, tous vont subir l'injection :*
   i. *quelle est la probabilité que plus de 2 enfants de cette famille contractent la maladie ?* 0,00010557.
   ii. *quelle est la probabilité que moins de deux enfants contractent la maladie ?* 0,912673.

Ex. rec.(2). 2 : Le « Dragon Furieux » (I).

CHI NOI, le patron du « Dragon Furieux », enregistre les choix de ses clients depuis l'ouverture de son établissement. Il sait que 60% de ses clientes féminines choisissent un thé au jasmin à la fin du repas, que 20 % optent pour un café et que les autres ne prennent rien. Parmi les hommes, 40% prennent un thé, 30% un café, les autres rien.

Une commande pour un café vient d'arriver au bar, quelle est la probabilité que cette commande provienne d'un homme, si pour le moment 18 hommes et 22 femmes terminent leur repas au « Dragon Furieux »? 0,551.

a) *Une commande pour un thé arrive en même temps que celle du café, quelle est la probabilité qu'elle provienne d'une femme ?* 0,6471.
b) *André et Béatrice viennent de terminer leur plat principal, quelle est la probabilité (une seule probabilité globale à calculer) qu'ils ne prennent ni café, ni thé, leurs choix étant - par hypothèse - indépendants ?* 0,06.

Ex. rec.(2). 3 : Le « Dragon Furieux » (II).

André et Béatrice se rendent ce soir au « Dragon Furieux », restaurant chinois réputé du quartier. Devant la grande diversité de la carte, ils décident de choisir leur plat au hasard et sans se consulter du tout.

La carte compte 150 plats différents.

a) *Quelle est la probabilité que le plat choisi par l'un soit identique au plat choisi par l'autre ?* 0,0067.

b) *Quelle est la probabilité que le plat choisi par l'un soit différent de celui choisi par l'autre ?* 0,9933.

c) *Si, contrairement aux hypothèses de l'énoncé, Béatrice choisi son plat la première et indique à André qu'elle a choisi le plat 63, quelle est la probabilité qu'André choisisse au hasard le plat 52 :*

   i. *si André et Béatrice ont convenu d'avance de ne pas prendre le même plat ?* 0,0067.

   ii. *si aucune convention n'a été passée entre eux quant aux choix des plats ?* 0,0067.

N.B. les arrondis à la quatrième décimale ne permettent de voir la légère diminution de la probabilité dans ce dernier cas.

Ex. rec.(2). 4 : A l'insu de leur plein gré ?

A la fin de la première étape du tour cycliste du ZÔTRLAND, on expérimente un nouveau système de contrôle antidopage. Ce dernier est basé sur l'analyse d'une goutte de sang prise au bout du doigt du cycliste testé.

Cette analyse peut détecter instantanément les traces de l'agent P qu'un nouveau produit dopant interdit, le PROB 0345, génère dans la circulation sanguine du sportif dopé, et cela avec une probabilité de 96 %.

Cependant l'agent P est également présent dans la circulation sanguine d'une personne sur 50 dans la population des personnes qui n'ont jamais pris de PROB 0345.

Un certain nombre de coureurs tirés au hasard dans le peloton sont soumis au test.

Sous couvert de l'anonymat, on interroge tous ceux parmi ceux-ci pour lesquels l'analyse a révélé des traces d'agent P. Les trois-quarts de ces derniers avouent s'être dopés au PROB 0345.

Quelle proportion de la population du peloton peut-on raisonnablement penser s'être dopée au PROB 0345 ? 0,05660377.

Ex. rec.(2). 5 : Protection automobile.

Vous venez d'acheter le dernier modèle d'auto de la firme WMB, réputée pour la qualité de ses produits.

De nouveaux systèmes antivol sont montés sur tous les nouveaux modèles. Ils sont composés d'un transpondeur télécommandé et alimenté en courant électrique par la pile de l'émetteur de la clef de contact et d'un appareil de reconnaissance vocale d'un genre nouveau qui complète le circuit quand le mot adéquat est prononcé correctement par les personnes autorisées.

La politique de qualité totale de la firme WMB impose le remplacement préventif individuel de la pile de la télécommande après 3 ans d'utilisation. Les statistiques de la firme indiquent cependant que, malgré cette politique, 4 piles sur 1.000 s'usent complètement avant leur remplacement préventif. De plus, le système de reconnaissance vocale, qui est très récent, n'a pas fonctionné (alors qu'il l'aurait du) dans 1 cas sur les 5.000 cas testés pendant trois ans durant le programme de test du système qui cependant n'a pas été modifié avant son installation en série. On a pu établir que les pannes de ces systèmes complémentaires sont indépendantes l'une de l'autre.

Il est absolument nécessaire que le transpondeur et la reconnaissance vocale fonctionnent simultanément pour que la voiture soit utilisable.

a) *Quelle est la probabilité, à chaque tentative de démarrage de votre véhicule, que vous deviez utiliser les transports en commun ou faire appel à un service de dépannage suite à une défaillance du système antivol ?* 0,0041992.

b) *Sachant que, durant la première année d'existence de ce système antivol, WMB en a équipé 200.000 véhicules neufs vendus à des clients individuels distincts, combien de ces clients peut-on raisonnablement s'attendre à voir leur système antivol les empêcher de démarrer au moins une fois dans les trois premières années d'utilisation de leur nouvelle auto ?*

$\cong$ 840 propriétaires de voitures auront des raisons d'être très mécontents du système de protection de leur WMB.

Ex. rec.(2). 6 : : Port de la moustache au ZÔTRLAND.

Au ZÔTRLAND, 35% de la population masculine portent la moustache. 15 % de cette population sont âgés de moins de 25 ans. On recense également 20 % de jeunes de moins de 25 ans parmi les hommes ne portant pas moustache.

Quelle est la probabilité qu'un jeune homme (de moins de 25 ans), citoyen du ZÔTRLAND, pris au hasard, porte une moustache ? 0,2877.

Ex. rec.(2). 7 : Fiabilité de matériel.

L'entreprise NEW GEPARD emboutit des pièces de précision. Chacune de ses lignes de production est composée de plusieurs machines, avec en bout de ligne, une presse hydraulique qui travaille en continu 24h/24. Le programme de maintenance de la presse prévoit l'échange standard de cette dernière si le nombre de pièces embouties défectueuses observé en une heure excède le double de l'espérance mathématique de ce même nombre en une heure de fonctionnement.

La presse hydraulique emboutit 100 pièces à l'heure. Le contrôle de qualité a observé, sur longue période, qu'en moyenne 1 pièce sur 100 se positionnait mal dans les moules et donc était mal emboutie, ces mauvais emboutissages étant distribués aléatoirement dans le temps.

a) *Pour toute heure continue de travail de la machine , quelle est la probabilité que le service maintenance doive procéder à un échange standard ?* 0,07937320
b) *La firme possède 10 lignes de production, toutes identiques, à combien d'échanges standard le service maintenance doit-il s'attendre par mois si chacune des 10 lignes travaille 200 heures par mois ?* 158,744 ≅ 159 échanges – standard par mois.

Ex. rec.(2). 8 : Contrôle de qualité.

Pour l'entreprise HOLINIGHT S.A., il est temps de planifier la production des articles de décoration pour Noël qui font sa réputation. Ses concepteurs ont créé un nouveau modèle de mini-guirlande lumineuse composée de cinq ampoules « design ». La chaîne d'assemblage des guirlandes est déjà organisée et fonctionne de la façon suivante. Les ampoules sont livrées par le fournisseur en boîtes de 250. En début de chaîne, le contenu de chaque boîte est réparti aléatoirement en 50 lots de 5 ampoules. Chaque lot est ensuite utilisé entièrement pour le montage d'une guirlande. Le processus de montage ultrarapide ne permet pas le contrôle de qualité de chaque ampoule individuelle. Il est moins onéreux de tester l'ensemble en fin de chaîne. Il suffit d'une seule ampoule défectueuse pour que la guirlande ne fonctionne pas. Une guirlande qui ne fonctionne pas est écartée du conditionnement final.

L'entreprise dispose d'un stock de 3.000 boîtes de 250 ampoules. Toutes ces ampoules seront utilisées pour monter les guirlandes. Dans la présérie de test de la chaîne, après montage des guirlandes, on a établi que 2 ampoules ne fonctionnent pas par boîte de 250 pour diverses raisons (chocs, défauts, …).

a) *Combien de guirlandes l'entreprise HOLINIGHT doit-elle s'attendre à écarter après avoir utilisé les 3.000 boîtes ?*
b) *Définissez précisément la variable aléatoire à utiliser dans votre modèle et établissez explicitement sa distribution de probabilité.*

Définissons X, une V.A.D., représentant le nombre de guirlandes défectueuses possibles en utilisant toutes les ampoules d'une boîte de 250.

L'intervalle de X est [1, 2]. 5.940 guirlandes défectueuses.

Ex. rec.(2). 9 : Vive l'€.

Un des problèmes attendus lors de l'introduction de l'€ fiduciaire est l'apparition de fausses coupures, et ce d'autant plus, que le grand public ne disposera des billets et des pièces que peu de temps avant qu'ils aient cours légal le 1er janvier 2002.

Un faux-monnayeur célèbre a relaté dans ses mémoires que la pratique courante pour écouler les fausses coupures était d'en glisser une dans une liasse de 10 (donc avec 9 coupures légales). Nous considérerons que cette proportion sera respectée pour les faux-monnayeurs en € début 2002.

En janvier 2002, la première cible de ces derniers sera les supermarchés ; des études préliminaires ont établi qu'un client sur 1.000.000 sera soit un faux-monnayeur essayant d'écouler une partie de sa production, soit un complice.

On estime également que la probabilité pour un client honnête d'utiliser une fausse coupure en € à son insu est de l'ordre de 1/100.000.

Quelle est la probabilité, en janvier prochain, de débusquer un faux-monnayeur ou un complice si un client de supermarché est surpris à payer avec une fausse coupure libellée en € ? 0,0099.

Ex. rec.(2). 10 : La cour de récréation.

Xavière, Yvonne et Zoé se disputent dans la cours de récréation pour le partage des friandises de leur pique-nique qu'elles ont mises en commun selon les termes de leur pacte de « meilleures amies ». Elles disposaient chacune d'un bonbon sûr et d'un bonbon au chocolat, qui chacun était emballé dans un papier marqué de leur initiale. Les bonbons sûrs sont emballés dans du papier argenté, tandis que les bonbons au chocolat le sont dans un papier blanc.

a) *De combien de façons les trois amies peuvent-elles aligner les bonbons à partager sur l'appui de la fenêtre :*
   i. *si aucune contrainte n'est mise sur l'alignement ?* 720.
   ii. *si les bonbons sûrs sont regroupés (doivent rester côte à côte) ?* 144.
   iii. *si les bonbons sûrs sont regroupés d'une part et les bonbons au chocolat de l'autre ?* 72.
   iv. *si Xavière impose que ses propres bonbons soient regroupés ?* 240.
   v. *si Xavière impose que ses propres bonbons soient regroupés et que bonbons sûrs et bonbons au chocolat doivent restés groupés entre eux ?*8.

b) *Quelle est la probabilité, si Xavière choisit au hasard, qu'elle tire :*
   i. *deux bonbons au chocolat l'un après l'autre sans remise ?* 0,2.
   ii. *deux bonbons du même type en une poignée de 2 ?* 0,4.
   iii. *les deux bonbons à son initiale l'un après l'autre sans remise ?* 1/15.
   iv. *les deux bonbons à son initiale en une poignée ?* 2/15.

Ex. rec.(2). 11 : Expédition alpine.

G. Rimpeur et Al Piniste partent en expédition dans les Hautes Alpes. Ils décident de faire route séparément mais d'être toujours en vue l'un de l'autre. Pour minimiser le poids des bagages, ils décident de communiquer par alignement de fanions plutôt que de tout autre manière. Il décident d'emporter 3 fanions triangulaires bleus, 3 fanions triangulaires jaunes et 2 fanions carrés bleus. Les fanions de même couleur et de même forme sont indistinguables les uns des autres, dès lors ils décident d'y apposer des figures autocollantes (croix, triangle, …) toutes différentes.

Avant de se séparer, ils doivent décider d'un code commun d'interprétation des alignements de fanions, étant donné que les 8 fanions seront toujours tous utilisés.

a) *Combien de codes sont possibles :*

   i. *si aucune restriction n'est mise sur l'alignement des fanions ?*
   40.320 possibilités.

   ii. si les couleurs de base doivent rester groupées entre elles ?

   1.440 possibilités d'alignement.

   iii. si les formes doivent rester groupées entre elles ?

   2.880 possibilités d'alignement.

b) *Que devient la réponse donnée en a)i. si les symboles autocollants se sont tous faits arracher par le vent ?*

   560 possibilités.

c) *Que devient la réponse donnée en a)iii si les symboles autocollants se sont tous faits arracher par le vent ?*

   40 possibilités d'alignement des fanions.

Ex. rec.(2). 12 : Radioguidage matinal.

Le service de radioguidage de la capitale régionale a établi que le nombre d'incidents (accrochages, pannes, conducteurs fantômes, …) pouvant embarrasser la circulation sur le contournement de la ville durant la période de pointe du matin (7h30 – 9h00) est de 2 par quart d'heure.

Il est tout juste 8h15 :

a) *Quelle est la probabilité qu'aucun incident ne se produise entre maintenant et 8h30 ?* 0,132. (Voir tables.)

b) Quelle est la probabilité que plus de 3 incidents se produisent entre maintenant et 8h30 ? 0,143.

c) *Quelle est la probabilité qu'aucun incident ne se produise entre maintenant et 8h45 ?* 0,018. (Voir tables.)

d) *Quelle est la probabilité que 4 incidents se produisent entre maintenant et 9h00 ?* 0,134. (Voir tables.)

e) Il est maintenant 8h20 et au moins deux incidents se sont produits depuis 8h15 : *quelle est la probabilité qu'au moins deux incidents de plus se produisent encore avant 8h30 ?* 0,2407.

Ex. rec.(2). 13 : Contrôle de qualité (II).

L'entreprise GRANGALOP emboutit des pièces de précision. Son appareil de production est composé de plusieurs machines, avec en bout de chaîne, une presse hydraulique qui travaille en continu 24h/24. La presse hydraulique doit bientôt être remplacée car le contrôle de qualité a observé, sur longue période, qu'en moyenne 5 pièces sur 200 se positionnaient mal dans les moules et donc étaient mal embouties. Les commandes sont honorées en prenant au hasard le nombre adéquat de pièces finies dans le stock des pièces déjà embouties.

Une commande de 200 pièces vient d'arriver. Le contrat stipule que sa livraison ne pourra se faire que si moins de 6 pièces sont défectueuses.

a) *Quelle est la probabilité, qu'après le contrôle de qualité durant lequel chaque pièce est examinée pour sa conformité au cahier des charges, la commande soit refusée ?* 0,3840301.

b) *Cette commande risque de se reproduire de nombreuses fois à l'avenir. Le patron de l'entreprise cherche à s'assurer contre le risque de refus d'une commande. Il estime qu'un refus de commande après contrôle de qualité lui coûte 1000 €. La compagnie d'assurances « Les abeilles travailleuses » lui proposent un contrat à prime unique de 1200 € pour trois commandes. Le patron va-t-il signer ce contrat ? Justifiez.* La bonne décision sera de NE PAS s'assurer.

Ex. rec.(2). 14 : « Kill Chupika ».

La firme AKIRA ANIMATED PICTURES fortement concurrencée vient de lancer un nouveau jeu électronique « Kill Chupika » dont les héros se divisent en deux catégories, les Bons et les Méchants. Le jeu comprend B Bons et M méchants. Vu le succès du jeu, des collections complètes d'images de tous les héros sont mises en vente. Une collection complète comprend donc B images de Bons et M de Méchants.

Colin et Jessica se sont fait offrir par leur grand-mère une collection complète à partager entre eux deux. Le partage des images se fait par tirage au sort d'une image, chacun à son tour, en commençant par Jessica.

a) Quelle est la probabilité que Jessica tire une image de Bon au premier tirage ? B/ (B+M).

b) Quelle est la probabilité que Jessica tire une image de Bon lors de son deuxième tirage ?

[(B-2).(B-1).B + 2.(B-1).B.M + B. (M-1).M] / [(B+M).(B+M-1).(B+M-2)].

c) Quelle est la distribution de probabilité et l'espérance mathématique de X : le nombre de Bons tirés par les deux enfants après les trois premiers tirages ?

La distribution de probabilité de X peut donc s'écrire :

X	P(X)
0	M.(M-1).(M-2) / D
1	3.B.M.(M-1) / D
2	3.M.B.(B-1) / D
3	B.(B-1).(B-2) / D
Avec D identique à supra.	

Et E(X) =

[3.B.M.(M-1) + 6.M.B.(B-1) + 3.B.(B-1).(B-2)]/[(B+M).(B+M-1).(B+M-2)].

Ex. rec.(2). 15 : Jeux de boules.

Armand, Béatrice, Charlotte et Didier en vacances à l'hôtel BON REPOS ont acquis chacun deux boules de pétanque. Chaque paire diffère des autres paires par la couleur des boules et quatre boules diffèrent des quatre autres par le dessin gravé dans la surface de la boule.
Le tableau suivant synthétise la répartition des boules, leur couleur et leur dessin au moment de leur acquisition.

Personne	Boule n°	Couleur	Dessin gravé
Armand	1	Jaune	Ellipses
	2	Jaune	Losanges
Béatrice	1	Rouge	Ellipses
	2	Rouge	Losanges
Charlotte	1	Bleue	Ellipses
	2	Bleue	Losanges
Didier	1	Verte	Ellipses
	2	Verte	Losanges

Didier, responsable de l'organisation, veut aligner toutes les 8 boules avant le concours pour vérifier leur sphéricité.

a) *De combien de façons peut-il les disposer :*
   i. *s'il les différencie par la couleur et le dessin ?* 40320 façons.
   ii. *uniquement par la couleur ?* 2520 façons.
   iii. *uniquement par le dessin ?* 70 façons.
   iv. *si les couleurs identiques doivent rester groupées* ?384 façons.
   v. *si les dessins identiques doivent rester groupés ?* 1152 façons.

b) Charlotte boude parce qu'elle perd toujours et décide de céder ses boules aux trois autres. Du coup, tous veulent une autre répartition de 6 boules (une paire chacun) parmi les 8 dorénavant disponibles. *Combien de répartitions différentes sont-elles possibles :*
   i. *si chaque individu doit obtenir une paire de même couleur ?* 24 possibilités.
   ii. *si aucune contrainte n'est imposée que ce soit sur la couleur ou le dessin gravé ?* 2520 possibilités.
   iii. *si Béatrice veut absolument garder ses boules rouges et que les deux autres doivent obtenir une paire de même couleur ?* 6 possibilités.

c) Aucune répartition ne parvient à satisfaire les trois joueurs restants. On décide de tirer les 6 boules (Béatrice a donc gardé ses deux boules rouges) au hasard et sans remise. *Quelle est la probabilité qu'Armand (le premier à tirer deux boules l'une après l'autre) obtienne :*
   i. *une paire de même couleur ?* 0,2.
   ii. *une paire verte ?* 0,067.
   iii. *deux boules de dessins différents ?* 0,6.

Ex. rec.(2). 16 : Contrats d'assistance.

A L'hôtel BON REPOS, F. Harniente, met un dériveur à la disposition des ses hôtes. Cependant, ces derniers étant assez maladroits et peu entraînés, il peut arriver qu'ils heurtent un récif, éventrant ainsi à coup sûr la coque, ou brisent le mat suite à de mauvaises manœuvres. A chaque fois qu'un tel incident se produit, il faut faire appel à une société d'assistance spécialisée pour récupérer le bateau et son équipage ou à un autre moyen de sauvetage.

L'expérience a enseigné à F. Harniente que la coque est trouée lors d'une sortie sur 10 et que le mat se brise lors d'une sortie sur 20. Les deux avaries peuvent se produire simultanément mais sont considérées le faire indépendamment l'une de l'autre.

F. Harniente est tenu de payer à la société d'assistance une prime forfaitaire par sortie de son dériveur. Cette prime, exprimée en €, est égale à 100 fois la probabilité de devoir intervenir lors de cette sortie.

a) *Sachant qu'un sauvetage par un autre moyen coûterait 200 € à F. Harniente, la prime payée à la société d'assistance est-elle équitable ?*

   F. Harniente a intérêt à s'assurer : la prime est non équitable en sa faveur.

b) *Quel est le coût maximal d'un sauvetage que peut se permettre de supporter la société d'assistance ?* 100 €.

Ex. rec.(2). 17 : Intoxications alimentaires.

Dans cette région, la firme multinationale CACO-LACO distribue la boisson gazeuse qui porte son nom au départ de son usine située dans la capitale.
Depuis quelques jours, on observe une augmentation des cas d'intoxication alimentaire qui semble liée à la consommation de CACO-LACO.
Les études de marché effectuées par des firmes indépendantes indiquent que 60% de la population de la région ne consomment pas cette boisson.
D'autre part, les études épidémiologiques du Ministère de la Santé indiquent que 35% de la population de la région est intoxiquée à divers degrés actuellement, alors que l'on sait par ailleurs que, parmi la population qui ne consomme pas de CACO-LACO, la probabilité d'intoxication alimentaire d'une personne est de 5%.

a) *Quelle est la probabilité qu'une personne consommatrice de CACO-LACO soit intoxiquée ?* 0,8.

b) *Une personne souffrant d'une intoxication alimentaire vient de se présenter aux urgences de l'Hôpital Saint Sang, quelle est la probabilité que cette personne soit consommatrice de CACO-LACO ?* 0,9143.

c) *Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population de la région soit consommatrice de CACO -LACO et intoxiquée ?* 0,32

Ex. rec.(2). 18 : DJ NOISE.

DJ NOISE (DJN) doit animer une soirée de toute première importance pour sa réputation. Elle aura lieu samedi soir de 21 heures à 2 heures du matin le lendemain.

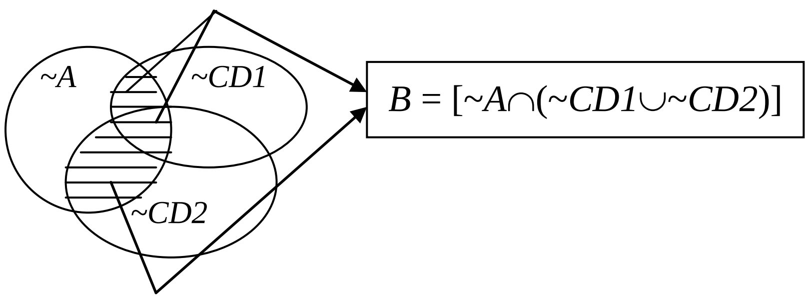
Il emporte avec lui, outre le petit matériel, les tables de mixage et les haut-parleurs suffisamment redondants pour qu'il n'ait rien à craindre comme défaillances de leur part, deux lecteurs de disques compacts et un amplificateur de puissance, ce sont ces trois derniers appareils qui lui posent un problème de fiabilité.

Confiant dans ses capacités d'animation, DJN considère que la réussite de la soirée sera assurée pour autant que son amplificateur et un au moins des lecteurs de disques compacts fonctionnent sans panne tout au long de la soirée.

Il sait que la probabilité de panne de l'amplificateur est fonction de sa durée de fonctionnement et se calcule comme : P(panne de l'amplificateur) = $0{,}02{+}10^{-6}t^2$, avec $t \leq 900$: la durée de fonctionnement (en minutes) de l'amplificateur au cours de la soirée. (Il n'a jamais fait fonctionné son ampli plus de 15 heures.) De plus, chaque lecteur de disques compacts a une probabilité de panne au cours de la soirée égale à 0,04. Toutes ces probabilités sont indépendantes les unes des autres.

a) *Quelle est la probabilité que la soirée ne soit pas gâchée ?* 0,8886.

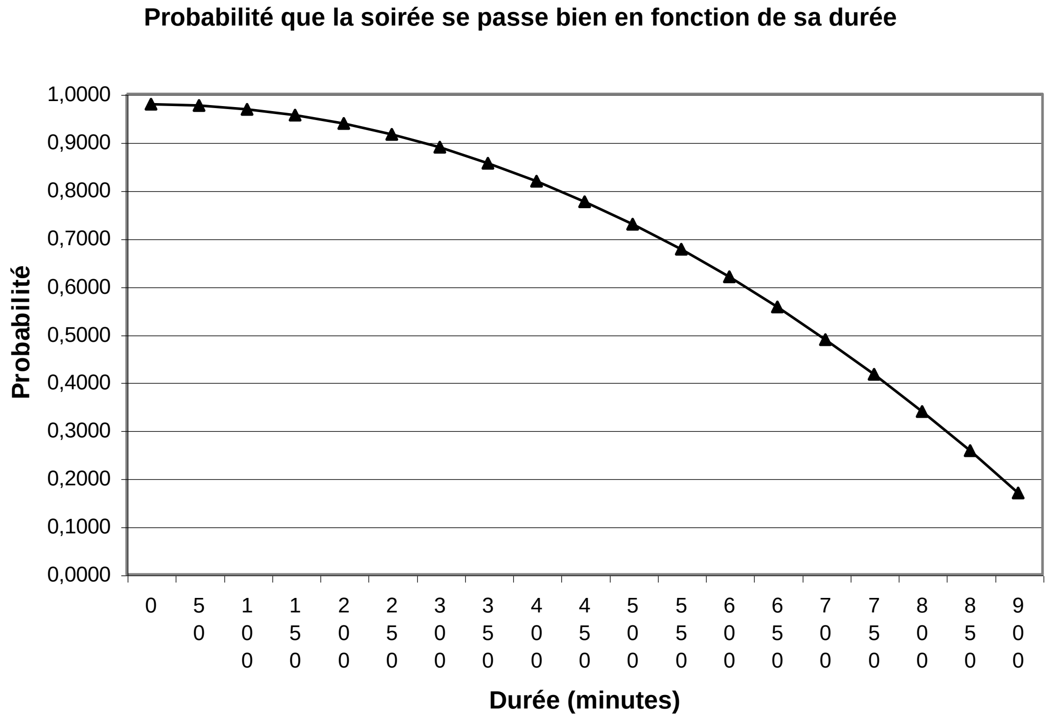
Illustrez votre raisonnement par un schéma utilisant des diagrammes de Venn.



b) Que devient cette probabilité si la durée de la soirée est inconnue d'avance ?

0,978432-(0,9984t²/1000000), t ≤ 900.

Représentez graphiquement l'évolution de la probabilité en fonction de la durée de la soirée.



c) Calculez l'intervalle des valeurs possibles de la probabilité calculée en b) sachant :

i. que la soirée peut-être interrompue dès qu'elle a commencé si un ou plusieurs de ses participants troublent l'ordre public ;

ii. et qu'un arrêté de police interdit à tous les organisateurs de soirées dans cette commune de les prolonger au-delà de 5hrs du matin.

iii. donc que la soirée peut être interrompue pour diverses raisons entre 21hrs (exclu) et 5hrs du matin (inclus).

On pose l'hypothèse que t est mesuré en continu, donc que t ∈] 0, 480].

Donc P(*B*) ∈] 1, 0,7484].

Ex. rec.(2). 19 : Mobilité urbaine.

Un bus-navette part toutes les demi-heures de la gare centrale de cette grande ville et fait le tour de la cité en trois étapes :

- Gare centrale (GC) – Grand-Place (GP) 3 km ;
- Grand-Place – Cathédrale (C) 1,5 km ;
- Cathédrale – Gare centrale 4,5 km.

A l'expérience, le chauffeurs de bus savent que quelque soit le moment de la journée, ils peuvent rencontrer aléatoirement une des trois conditions de trafic suivantes sur chaque tronçon du trajet : fluide, normal et dense avec diverses probabilités notées dans le tableau suivant et indépendantes les unes des autres.

	Probabilités des conditions de trafic		
Tronçon	Fluide	Normal	Dense
GC-GP	0,5	0,1	0,4
GP-C	0	0,3	0,7
C-GC	0,6	0,4	0

En cas de trafic normal, le bus peut rouler à une vitesse moyenne de 30 km/h ; si le trafic est dense, sa vitesse moyenne est réduite de moitié par rapport à une situation normale tandis que si le trafic est fluide, cette même vitesse s'élève à 45 km/h.

a) *On vous demande la distribution de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire X représentant le temps (en minutes) que mettra un bus pour parcourir les trois tronçons d'un trajet complet partant de la Gare centrale et y revenant.*

La distribution de probabilité de X, le temps de parcours peut s'écrire :

Tableau 3 : distribution de probabilité du temps de parcours total (X)								
X(min)	13	15	16	18	19	21	24	27
P(X)	0,09	0,018	0,27	0,054	0,14	0,1	0,216	0,112

b) *Quelle est l'espérance mathématique de X ? Que signifie sa valeur ?*

E(X) = 19,7 minutes.

Ex. rec.(2). 20 : Le concours hippique.

Dans un concours hippique, les obstacles ont été conçus de telle sorte que n'importe quel couple cheval/cavalier a une probabilité de 94 % de franchir chaque obstacle sans encourir de pénalité. Le parcours de ce concours compte seize obstacles.

a) *Quelle est la probabilité, qu'un couple cheval/cavalier :*

   i. *réalise un parcours complet sans encourir la moindre pénalité ?*

   0,3716.

   ii. *encoure une et une seule pénalité sur un parcours complet ?*

   0,3795.

   iii. *encoure au moins une pénalité sur un parcours complet ?*

   0,6284.

   iv. *encoure au plus deux pénalités ?*

   0,9328.

b) *Quel est le nombre moyen de pénalités auquel il faut s'attendre pour chaque couple cheval/cavalier lors d'un parcours complet de 16 obstacles ?*

   0,96 pénalités sur un parcours complet.

Ex. rec.(2). 12 : Les choux à la crème du pâtissier K. LORIE.

Chaque jour, samedis, dimanches et jours fériés compris, Madame M. Erveilleux succombe à la tentation de s'asseoir à une table de la pâtisserie K. LORIE et commande systématiquement un chou à la crème. Si la pâtisserie se trouve en rupture de stock, elle choisit une autre spécialité, mais c'est le chou qui prime dans ses choix. Jamais, Mme Erveilleux ne commande de seconde pâtisserie le même jour après avoir consommé la première.

Elle a observé qu'elle obtenait en moyenne un chou 4 fois sur 5.

a) *Quelle est la probabilité qu'elle soit totalement satisfaite au cours de la prochaine semaine (7 jours) ?* 0,2097.

b) *Quelle est la probabilité qu'elle consomme au moins 4 choux au cours de la prochaine semaine (7 jours) ?* 0,9667.

c) *Combien de choux peut-elle raisonnablement s'attendre à consommer chez K. LORIE au cours prochaine semaine (7 jours) ? et au cours du mois prochain (30 jours) ?* 24 choux.

<u>Ex. rec.(2). 22 :</u> Job de vacances avec DJ NOISE.

DJ NOISE, vedette des soirées rave de la discothèque 11CK'LATT, sent l'épuisement le gagner étant donné le succès de sa formule. Il désire donc être secondé pendant 5 minutes par un étudiant chaque fois que le taux d'arrivée des fêtards dépasse 4 entrées par minute.

Pour les mois de vacances, il a observé que le taux moyen des entrées était de 2,5 par minute entre 22hrs et 02 hrs du matin..

L'étudiant se présente à 22 heures et quitte la discothèque à 2 heures du matin.

a) *A combien de temps peut-on estimer l'inoccupation de l'étudiant par soirée de vacances ?* 110 minutes.

b) A combien d'entrées doit-on s'attendre entre 22hrs et 2hrs du matin chaque soirée de vacances ? 600 entrées par soirées.

c) Il est exactement 22h30, ce 22 juillet, *quelle est la probabilité qu'entre maintenant et 22h35, il y ait plus de 12 entrées, moins de 10, au moins 10, au plus 12 ?* 0,4810 ; 0,2014 ; 0,7986 ; 0,5190.

Ex. rec.(2). 23 : L'étalage de G. LASTEREO.

G. LASTEREO, vendeur de matériel Hi-Fi, désire attirer ses clients avec un étalage changeant. Ne disposant que de peu de place, il a décidé de toujours exposer 1 télévision portable, trois postes de radio miniature du même modèle et de couleurs différentes (rouge, vert, bleu), ainsi que de deux mini-chaînes totalement identiques.

a) *De combien de manières peut-il disposer ces objets en présentant chaque fois un étalage différent, sachant qu'ils sont rangés sur un rang et sur une seule travée :*

   i. *si aucune contrainte n'est mise sur la disposition des appareils ?* 360.

   ii. *si les mini-chaînes doivent rester groupées entre elles ?* 120.

   iii. *si les mini-chaînes doivent rester groupées entre elles ainsi que les postes de radio entre eux ?* 36.

   iv. *si aucune contrainte n'est mise sur la disposition et si pratiquement tous les appareils de radio ont été vendus et que seuls trois modèles identiques (même modèle de la même couleur orange) de postes de radio sont encore disponibles pour former l'étalage avec la T.V. portable et les deux mini-chaînes ?* 60.

G. LASTEREO a changé de méthode pour réaliser son étalage. Il a numéroté comme suit chaque appareil : 1 pour la T.V., 2, 3 et 4 pour les postes de radios, 5 et 6 pour les mini-chaînes ; ces numéros ont été reportés individuellement sur autant de petits papiers soigneusement mélangés qu'il tire ensuite au hasard.

b) *Quelle est la probabilité :*

   i. *qu'il tire les numéros des postes de radio en une seule poignée de trois petits papiers ?* 0,05.

   ii. *qu'il tire les numéros des postes de radio en trois tirages successifs individuels et sans remise de petits papier ?* 0,05.

   iii. *de tirer successivement, avec remise après chaque tirage, les deux papiers désignant les mini-chaînes ?* 1/9.

Il a déjà tiré le n°1 au 1er tirage, le numéro n'est pas remis avec les autres.

c) *Quelle est la probabilité :*

   i. *qu'il tire le n°2 au 2ème tirage ?* 0,2.

   ii. *qu'il tire un numéro désignant une mini-chaîne au 2ème tirage ?* 0,4.

Ex. rec.(2). 24 : Héli-secours.

Durant les dimanches d'été un seul navire rapide de sauvetage est de garde le long de la côte de la baie de Las Medusas.

Cependant, il s'avère que des coups de brume, des grains soudains ou la simple affluence de plaisanciers peuvent créer une succession rapide de situations d'urgence (incidents graves dans le jargon des sauveteurs) pour lesquelles le navire ne suffit pas à la tâche de récupération des personnes et des bateaux en difficulté.

L'expérience passée permet d'affirmer qu'on doit faire appel à un service privé d'hélicoptères - qui envoie alors un appareil spécialement équipé - si plus de 4 incidents graves sont signalés en une heure. Si la fréquence des incidents graves est de plus de 8 à l'heure, on appelle alors en renfort un deuxième hélicoptère également spécialement équipé. Le taux d'incidents graves, pour l'appel au renfort des hélicoptères, est calculé d'heure entière à heure entière (de 9 à10 hrs, de 10 à 11hrs, …)

Au cours des 20 derniers dimanches pour lesquels on a conservé des données précises, on a pu calculer que le taux moyen d'incidents graves était de 3 par heure durant les heures de patrouille du bateau de sauvetage.

1. *On vous demande de calculer, pour chaque heure de prestation du bateau de sauvetage dimanche prochain, la probabilité de devoir faire appel à un hélicoptère et à deux hélicoptères.*

0,1809 ; 0,0038.

2. *Sachant que le bateau de sauvetage patrouille durant 10 heures consécutives chaque dimanche d'été et que chaque sauvetage lié à un incident grave coûte en moyenne 800€ à la municipalité de Las Medusas :*
    a. *Quel budget doit-on raisonnablement prévoir en moyenne pour chaque dimanche d'été ?* 24.000 €.
    b. *Quelle est la probabilité qu'il n'y ait que 10 sauvetages à effectuer ?* 0,0000152.
3. *Ce dimanche de juillet, il s'est passé 25 minutes depuis le début de cette heure de patrouille du bateau de sauvetage et 3 incidents graves au moins se sont déjà produits durant cet intervalle de temps. Quelle est la probabilité que durant les 35 minutes qui suivent, on doive faire appel à un hélicoptère en renfort ?* 0,3136.