Département d'Electronique, Université de M'sila
Master 1 (S1) : **ESE & INST**

M'sila le 16/01/2017
Chargé du module: Pr. Mezache Amar

Corrigé type du module « Traitement avancé du signal »

Ex#1 : (Filtre RII)

a- Calcul de la fonction de transfert analogique, $H_a(s)$:

Les spécifications sont : $\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| \geq -3dB, & \text{avec } \Omega_p = 0.25\pi \\ |H_a(j\Omega_s)| \leq -10dB, & \text{avec } \Omega_s = 0.45\pi \end{cases}$

D'après la FT du filtre analogique de Butterworth, on peut écrire :

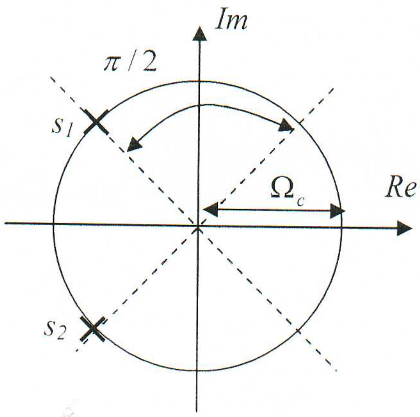
$$\begin{cases} -10\log_{10}\left(1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}\right) \geq -3 \\ -10\log_{10}\left(1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}\right) \leq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\left(\dfrac{0.25\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{3/10} \\ 1+\left(\dfrac{0.45\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{10/10} \end{cases}$$

La combinaison des deux équations ci-dessus résulte

$$\begin{cases} N = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log\left[(10-1)/(10^{3/10}-1)\right]}{\log((0.45\pi)/(0.25\pi))} \geq 1.8731 \\ \Omega_c = 0.45\pi 9^{-1/2N} = 0.9824 = 0.7864 \end{cases}$$

On prend alors N=2 qui donne $\Omega_c = 0.8162$

Le cercle ci-contre permet d'obtenir les pôles de $H_a(s)$



$$\begin{cases} s_1 = -\Omega_c(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) \\ s_2 = -\Omega_c(\cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(-1+j) \\ s_2 = \dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(-1-j) \end{cases}$$

La F.T est donnée par

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2}$$
$$= \frac{0.6662}{s^2 + 1.1543s + 0.6662}$$

b- Calcul de la fonction de transfert numérique, $H(z)$:

On transforme d'abord $H_a(s)$ sous forme de fractions rationnelles:

$$\frac{\Omega_c^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

La méthode des résidus donne

$$\begin{cases} A_1 = \left.\dfrac{\Omega_c^2}{(s-s_2)}\right|_{s=s_1} = -j\Omega_c/\sqrt{2} \\ A_2 = \left.\dfrac{\Omega_c^2}{(s-s_1)}\right|_{s=s_2} = j\Omega_c/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \quad H(z) = \frac{A_1}{1-e^{s_1}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{s_2}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{A_1}{1-e^{s_1}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{s_2}z^{-1}} = \frac{j\dfrac{\Omega_c}{\sqrt{2}}(e^{s_2}-e^{s_1})z^{-1}}{1-(e^{s_1}-e^{s_2})z^{-1}+e^{s_1+s_2}z^{-2}}$$

$$= \frac{0.3536z^{-1}}{1-0.9410z^{-1}+0.3152z^{-2}}$$

c- Calcul de la sortie du filtre $y(n)$:

On a $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$. D'où $Y(z) = 0.3536z^{-1}X(z) + 0.9410z^{-1}Y(z) - 0.3152z^{-2}Y(z)$

On applique la transformée en Z inverse, on trouve finalement

$y(n) = 0.3536x(n-1) + 0.9410y(n-1) - 0.3152y(n-2)$

Ex #2 : (Filtre RIF)

a- Coefficients de la réponse impulsionnelle :

La conception du filtre RIF passe-haut est obtenue par le calcul de $h(n) = h_d(n)w(n)$

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right] \quad \text{pour } \alpha = (N-1)/2$$

$$= \frac{\sin(\pi(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} - \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

On applique $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $h(n)$ devient

$$h(n) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(\pi(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} - \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\omega_c(n-\alpha)}\right]\left[0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n \neq \alpha \\ 0.55\left[0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right)\right], & n = \alpha \end{cases}$$

<u>A.N</u> :

Pour n=0, 1, …, 6, on obtient

$h(n)$= [0.0076 -0.0152 -0.2421 0.55 -0.2421 -0.0152 0.0076].

b- La phase et l'amplitude de la réponse fréquentielle :

La symétrie de $h(n)$ par rapport à α =3, montre que $b_0 = b_6$, $b_1 = b_5$ et $b_2 = b_4$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(b_0(e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + b_1(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + b_2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + b_3\right)$$
$$= e^{-j3\omega}\left(2b_0\cos(3\omega) + 2b_1\cos(2\omega) + 2b_2\cos(\omega) + b_3\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\left(0.0152\cos(3\omega) - 0.0304\cos(2\omega) - 0.4842\cos(\omega) + 0.55\right)$$

On obtient

$$\begin{cases} \varphi = -3\omega \quad \textit{(la phase est linéaire)} \\ \left|H(e^{j\omega})\right| = 0.0152\cos(3\omega) - 0.0304\cos(2\omega) - 0.4842\cos(\omega) + 0.55 \end{cases}$$

Ex #3 : (Processus Stochastique)

a) Ergodicité dans la moyenne et l'autocorrélation :

L'espérance mathématique et la moyenne temporelle sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0 \\ \langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega_0 t + \Theta)dt = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Le processus est ergodique dans la moyenne}$$

$$R_{xx}(t+\tau,t) = E[X(t+\tau)X(t)] = E[A\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \Theta)A\cos(\omega_0 t + \Theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2}E\left[\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)\right]$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

La transformation $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$ est utilisée

$$\langle x(t+\tau)x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \Theta)\cos(\omega_0 t + \Theta)dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\left[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\Theta) + \cos(\omega_0\tau)\right]dt = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

On obtient $E[X(t+\tau)X(t)] = \langle x(t+\tau)x(t)\rangle$, alors $X(t)$ est ergodique dans l'autocorrélation.

b) Densité spectrale de puissance :

En se basant sur la stationnarité au sens large de $X(t)$, la densité spectrale de puissance peut être calculée par la transformée de Fourier de $R_{xx}(t+\tau,t)$ comme suit :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} d\tau$$

$$= \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Où $\delta(.)$ est l'impulsion de Dirac.

c) La densité de probabilité, $f_Y(y)$ du processus $Y=X^2$:

on a $g(x) = x^2$

et $x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x_1 = \sqrt{y}$ et $\Rightarrow x_2 = -\sqrt{y}$

Alors, on utilise directement l'expression donnée dans le cours

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-y/2\sigma^2} \qquad y \geq 0$$